

Binarno kodirani dekadni brojevi

Koriste se radi tačnog zapisa mešovityh brojeva u računarskom sistemu. Princip zapisa je da se svaka dekadna cifra kodira odredjenim binarnim zapisom. Za uspešno kodiranje neophodno je da dužina kodne reči bude bar četiri.

Pri kodiranju treba da bude ispunjen uslov jednoznačnosti, odnosno da sve binarne reči koje ulaze u kod moraju da budu međusobno različite.

Osobine koje omogućuju jednostavije izvodenje operacija su:

- Najvećoj dekadnoj cifri (9) treba pridružiti reč koja ima najveću vrednost (posmatrana kao binarni broj).
- Parnim i neparnim dekadnim ciframa treba da odgovaraju parni odnosno neparni binarni brojevi.
- Kod je *komplementaran* ako su kodovi dekadnih cifara a i b za koje važi uslov $a + b = 9$ komplementarni (u smislu da su cifre na odgovarajućim pozicijama komplementarne).
- Kod je *te inski* ako je i -toj poziciji kodne reči pridružen broj p_i , tako da za dekadnu cifru q i njenu kodnu reč $y_3y_2y_1y_0$ važi jednakost $q = p_3y_3 + p_2y_2 + p_1y_1 + p_0y_0$

Dekadna cifra	Binarni kod					
	8421	2421	5421	753-6	višak 3	ciklički
0	0000	0000	0000	0000	0011	0001
1	0001	0001	0001	1001	0100	0101
2	0010	0010	0010	0111	0101	0111
3	0011	0011	0011	0010	0110	1111
4	0100	0100	0100	1011	0111	1110
5	0101	1011	1000	0100	1000	1100
6	0110	1100	1001	1101	1001	1000
7	0111	1101	1010	1000	1010	1001
8	1000	1110	1011	0110	1011	1011
9	1001	1111	1100	1111	1100	0011

Tabela 1: Binarni kodovi dekadnih cifara

Grejov kod

Grejov kod dužine $n \geq 0$ je funkcija $G(n, i)$ koja vrši 1-1 preslikavanje celog broja $i \in [0, 2^n - 1]$ pri čemu važi da se binarne reprezentacije $G(n, i)$ i $G(n, i + 1)$ razlikuju tačno na jednom mestu.

Karakteristike Grejovog koda su:

- Funkcija koja vrši preslikavanje nije jedinstvena tako da postoji više Grejovih kodova dužine n .
- Jedna od najčešće korišćenih funkcija se može definisati na sledeći način:
 $G(n, i) =_n i \oplus_n [i/2]$ gde $n > 0, i \in [0, 2^n - 1]$, $_n i$ označava i zapisano u binarnom sistemu kao neoznačen ceo broj u polju dužine n , a \oplus ekskluzivnu disjunksiju.

Heksadekadna cifra	Binarna vrednost	Grejov kod	Heksadekadna cifra	Binarna vrednost	Grejov kod
0	0000	0000	8	1000	1100
1	0001	0001	9	1001	1101
2	0010	0011	A	1010	1111
3	0011	0010	B	1011	1110
4	0100	0110	C	1100	1010
5	0101	0111	D	1101	1011
6	0110	0101	E	1110	1001
7	0111	0100	F	1111	1000

Tabela 2: Grejov kod dužine 4

- Ista funkcija $G(n, i)$ se može definisati i rekurentno:

$$\begin{aligned}
 G(n+1, i) &= 0G(n, i) & n > 0, i \in [0, \dots, 2^n - 1] \\
 G(n+1, i) &= 1G(n, 2^{n+1} - 1 - i) & n > 0, i \in [2^n, \dots, 2^{n+1} - 1] \\
 G(1, 0) &= 0 \\
 G(1, 1) &= 1
 \end{aligned}$$

Heksadekadna cifra	Binarna vrednost	Grejov kod			
		dužine 1	dužine 2	dužine 3	dužine 4
0	0000	0	00	000	0000
1	0001	1	01	001	0001
2	0010		11	011	0011
3	0011		10	010	0010
4	0100			110	0110
5	0101			111	0111
6	0110			101	0101
7	0111			100	0100
8	1000				1100
9	1001				1101
A	1010				1111
B	1011				1110
C	1100				1010
D	1101				1011
E	1110				1001
F	1111				1000

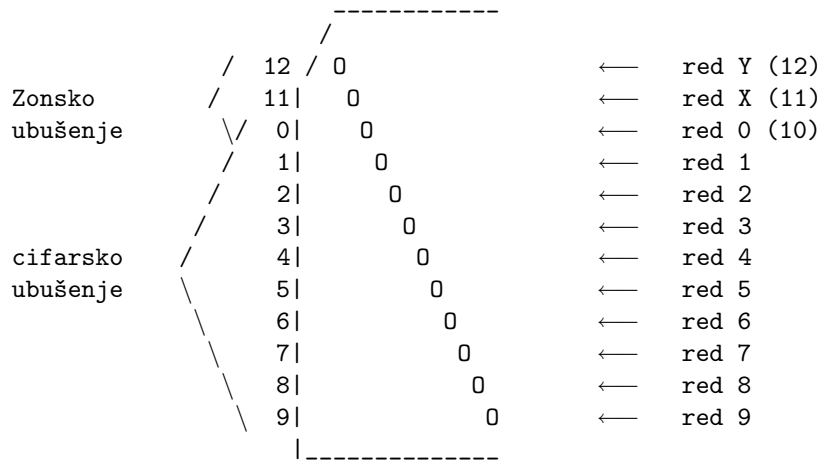
Tabela 3: Grejovi kodovi dužina 1, 2, 3 i 4

Zapis binarno kodiranih dekadnih brojeva

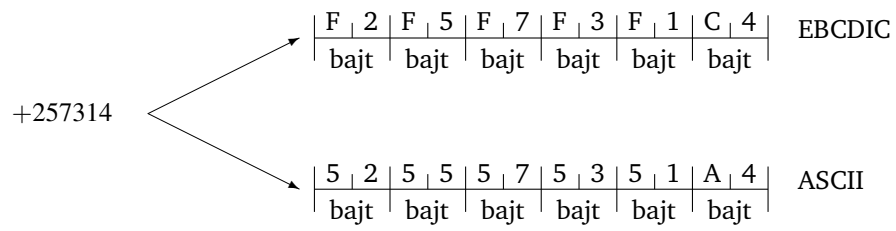
- Binarno kodirani zapis dekadnog broja u nekom kodu se dobija tako što se binarno kodira svaka od njegovih cifara.
- Označeni binarno kodirani dekadni brojevi poseduju dodatnu (dekadnu) cifru u koju se upisuje znak broja. Za zapis označenih brojeva se koriste zapisi:
 - Znak i apsolutna vrednost. Vrednosti cifre za znak broja mogu da budu proizvoljne i zavise od konkretne implementacije na računaru.
 - 10-ti komplement (tj. komplement osnove, N -ti komplement gde je $N = 10$). U ovom slučaju kod najmanje cifre (nule) označava pozitivne, a kod najveće cifre (devetke) negativne brojeve.

BCD zapis dekadnih brojeva

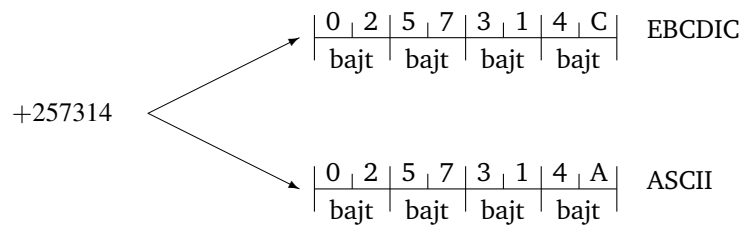
Vodi poreklo od Holeritove kartice kao i termini 'zonsko' i 'cifarsko' ubušenje.



Slika 1: Zonsko i cifarsko ubušenje na kartici



Slika 2: Nepakovani (zonski) zapis dekadnog broja



Slika 3: Pakovani (BCD) zapis dekadnog broja

Binarni kod	Heksadekadni kod	Značenje na mestu	
		cifre	znaka
0000	0	0	greška
0001	1	1	greška
0010	2	2	greška
0011	3	3	greška
0100	4	4	greška
0101	5	5	greška
0110	6	6	greška
0111	7	7	greška
1000	8	8	greška
1001	9	9	greška
1010	A	greška	plus
1011	B	greška	minus
1100	C	greška	plus (preporučeno)**
1101	D	greška	minus (preporučeno)**
1110	E	greška	plus
1111	F	greška	plus (zonsko)

**Primedba: ove kodove za znak generišu mašinske instrukcije za rad sa BCD podacima.

Tabela 4: Cifarski i zonski kodovi u EBCDIC kodu

Decimalna aritmetika

Promena znaka



Slika 4: Promena znaka dekadnog broja u pakovanom zapisu

Sabiranje i oduzimanje

Neka su A i B dekadni brojevi sa n cifara $A = a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1a_0$ i $B = b_{n-1}b_{n-2}\dots b_1b_0$, i neka je α funkcija kodiranja koja svakoj cifri u broju pridružuje binarnu kodnu reč

$$\begin{aligned} A\alpha &= \alpha(a_{n-1})\alpha(a_{n-2})\dots\alpha(a_1)\alpha(a_0) \\ B\alpha &= \alpha(b_{n-1})\alpha(b_{n-2})\dots\alpha(b_1)\alpha(b_0) \end{aligned}$$

Sabiranje se realizuje u dve faze:

1. Odredi se medjurezultat $C'_\alpha = A\alpha + B\alpha$:

$$\begin{array}{r} A\alpha = \alpha(a_{n-1}) \ \alpha(a_{n-2}) \ \dots \ \alpha(a_1) \ \alpha(a_0) \\ B\alpha = \alpha(b_{n-1}) \ \alpha(b_{n-2}) \ \dots \ \alpha(b_1) \ \alpha(b_0) \\ \hline C'_\alpha = \alpha(c'_{n-1}) \ \alpha(c'_{n-2}) \ \dots \ \alpha(c'_1) \ \alpha(c'_0) \end{array}$$

2. Dobijeni medjurezultat C'_α se koriguje zbog specifičnosti zapisa binarno kodiranih dekadnih brojeva.

Konačan rezultat je jednak zbiru medjurezultata i korekcije: $C_\alpha = C'_\alpha + K_\alpha$:

$$\begin{array}{r} C'_\alpha = \alpha(c'_{n-1}) \ \alpha(c'_{n-2}) \ \dots \ \alpha(c'_1) \ \alpha(c'_0) \\ K_\alpha = \alpha(k_{n-1}) \ \alpha(k_{n-2}) \ \dots \ \alpha(k_1) \ \alpha(k_0) \\ \hline C_\alpha = \alpha(c_{n-1}) \ \alpha(c_{n-2}) \ \dots \ \alpha(c_1) \ \alpha(c_0) \end{array}$$

Oduzimanje binarno kodiranih dekadnih brojeva može da se realizuje na dva načina:

1. Po sličnom principu kao i sabiranje, pri čemu se u obe faze umesto sabiranja vrši oduzimanje brojeva.
2. Kao sabiranje brojeva u potpunom komplementu.

Sabiranje i oduzimanje u kodu 8421

Funkcija kodiranja je definisana kao prevodjenje cifre u binarni sistem, tj. $\alpha(c) \rightarrow c_3c_2c_1c_0$ gde $\forall c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ važi $c = c_3 * 2^3 + c_2 * 2^2 + c_1 * 2^1 + c_0 * 2^0, c_i \in \{0, 1\}, i \in [0, 3]$

Prva faza je nezavisna od funkcije kodiranja tako da se primenjuje prethodni algoritam.

U prikazu druge faze se uvode sledeće oznake:

- $\alpha(c'_i)$ označava zbir dobijen sabiranjem kodova za dekadno cifarsko mesto i
- p'_i označava binarni prenos između zbirova $\alpha(c'_i)$ i $\alpha(c'_{i+1})$ u medjurezultatu prve faze sabiranja
- $\alpha(k_i)$ označava korekciju na dekadnom cifarskom mestu i .
- p''_i označava binarni prenos u drugoj fazi sabiranja sa dekadnog cifarskog mesta $i - 1$ na dekadno cifarsko mesto i . Važi $p''_0 = 0$.

Druga faza se izvodi u n koraka (n maksimum broja cifara dekadnih brojeva koji se sabiraju). Sabiranje se vrši zdesna u levo; postupak u i -tom koraku je sledeći:

1. Odredjuje se privremeni zbir $t_i = \alpha(c'_i) + p''_i$.
2. Na osnovu vrednosti t_i i p'_i odredjuje se korekcija $\alpha(k_i)$.
3. Krajnja vrednost $\alpha(c_i)$ se dobija kao zbir $t_i + \alpha(k_i)$. Pri tome se odredjuje i p''_{i+1} .

Korekcija medjurezultata je:

1. $p'_{i+1} = 1 \Rightarrow \alpha(k_i) = (0110)_2$
2. $t_i \geq (1010)_2 \Rightarrow \alpha(k_i) = (0110)_2$.
3. $\alpha(k_i) = (0000)_2$.

Prekoračenje se javlja kada je $p'_n = 1$ ili $p''_n = 1$.

Oduzimanje se realizuje po sličnom algoritmu kao sabiranje, ili kao sabiranje brojeva u potpunom komplementu.

Primeri

1. Odrediti zbir $A = 18345$ i $B = 9567$ u kodu 8421.

Prva faza		Korak 4	Korak 3	Korak 2	Korak 1	Korak 0
$A\alpha$	=	0001	1000	0011	0100	0101
$B\alpha$	=	0000	1001	0101	0110	0111
p'_0	=					0
p'_1	=				0	
p'_2	=			0		
p'_3	=		0			
p'_4	=	1				
p'_5	=	0				
$C'\alpha$	=	0010	0001	1000	1010	1100

Druga faza		Korak 4	Korak 3	Korak 2	Korak 1	Korak 0
$C'\alpha$	=	0010	0001	1000	1010	1100
p''_0	=					0
t'_0	=					1100
$\alpha(k_0)$	=					0110
$\alpha(c_0)$	=					0010
p''_1	=				1	
t'_1	=				1011	
$\alpha(k_1)$	=				0110	
$\alpha(c_1)$	=				0001	
p''_2	=			1		
t'_2	=			1001		
$\alpha(k_2)$	=			0000		
$\alpha(c_2)$	=			1001		
p''_3	=		0			
t'_3	=		0001			
$\alpha(k_3)$	=		0110			
$\alpha(c_3)$	=		0111			
p''_4	=	0				
t'_4	=	0010				
$\alpha(k_4)$	=	0000				
$\alpha(c_4)$	=	0010				
p''_5	=	0				
$C\alpha$	=	0010	0111	1001	0001	0010

2. Odrediti zbir $A = 259$ i $B = 938$ u kodu 8421.

A_{α}	=	0000	0000	0010	0101	1001
B_{α}	=	0000	0000	1001	0011	1000
P'	=	0	0	0	0	1
C'_{α}	=	0000	0000	1011	1001	0001
P''	=	0	0	1	0	0
K_{α}	=	0000	0000	0110	0000	0110
C_{α}	=	0000	0001	0001	1001	0111

3. Odrediti zbir $A = 9001$ i $B = 999$ u kodu 8421.

A_{α}	=	0000	1001	0000	0000	0001
B_{α}	=	0000	0000	1001	1001	1001
P'	=	0	0	0	0	0
C'_{α}	=	0000	1001	1001	1001	1010
P''	=	0	1	1	1	0
K_{α}	=	0000	0110	0110	0110	0110
C_{α}	=	0001	0000	0000	0000	0000

4. Odrediti zbir $A = 99001$ i $B = 999$ u kodu 8421.

A_{α}	=	1001	1001	0000	0000	0001
B_{α}	=	0000	0000	1001	1001	1001
P'	=	0	0	0	0	0
C'_{α}	=	1001	1001	1001	1001	1010
P''	=	***1	1	1	1	1
K_{α}	=	0110	0110	0110	0110	0110
C_{α}	=	0000	0000	0000	0000	0000

Prekoračenje se javlja zbog pojave prenosa $p''_5 = 1$.

5. Odrediti razliku $A = 1275$ i $B = 452$ u kodu 8421.

B_{α}	=	0000	0000	0100	0101	0010
$[-B_{\alpha}]_{nk}$	=	1001	1001	0101	0100	0111
+1						0001
$[-B_{\alpha}]_{pk}$	=	1001	1001	0101	0100	1000

$C = A + [B]_{pk}$						
A_{α}	=	0000	0001	0010	0111	0101
$[-B_{\alpha}]_{pk}$	=	1001	1001	0101	0100	1000
P'	=	0	0	0	0	0
C'_{α}	=	1001	1010	0111	1011	1101
P''	=	1	1	0	1	1
K_{α}	=	0110	0110	0000	0110	0110
C_{α}	=	0000	0000	1000	0010	0011

U ovom slučaju, u skladu sa pravilima za sabiranje brojeva u potpunom komplementu pojava prenosa $p''_5 = 1$ ne označava prekoračenje.

Sabiranje i oduzimanje u kodu vi ak 3

Funkcija kodiranja definisana je kao $\alpha(c) \rightarrow c_3c_2c_1c_0$ gde $\forall c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ važi $c = c_3 * 2^3 + c_2 * 2^2 + c_1 * 2^1 + c_0 * 2^0 - 3, c_i \in \{0, 1\}, i \in [0, 3]$

Prva faza je nezavisna od funkcije kodiranja tako da se primenjuje prethodni algoritam.

U kodu vi ak 3 druga faza sabiranja se izvodi u n koraka gde je n maksimum broja cifara dekadnih brojeva koji se sabiraju. Sabiranje se vrši zdesna u levo; postupak u i -tom koraku je:

1. Na osnovu vrednosti p'_{i+1} određuje se korekcija $\alpha(k_i)$.
2. Krajnja vrednost $\alpha(c_i)$ se dobija kao zbir $\alpha(c'_i) + \alpha(k_i)$. Pojava prekoračenja ('prenosa') u ovoj fazi sabiranja se ignoriše.

Korekcija:

1. $p'_{i+1} = 1 \Rightarrow \alpha(k_i) = (0011)_2$.
2. $p'_{i+1} = 0 \Rightarrow \alpha(k_i) = (1101)_2$.

Prekoračenje pri sabiranju se javlja kada je $p'_n = 1$.

Oduzimanje u kodu višak 3 se izvodi kao sabiranje u potpunom komplementu.

Primeri

1. Odrediti zbir $A = 18345$ i $B = 9567$ u kodu *vi ak 3*.

A_{α}	=	0100	1011	0110	0111	1000
B_{α}	=	0011	1100	1000	1001	1010
P'	=	0	1	0	1	1
C'_{α}	=	1000	0111	1111	0001	0010
K_{α}	=	1101	0011	1101	0011	0011
C_{α}	=	0101	1010	1100	0100	0101

Dobijeni rezultat sabiranja je broj 27912.

2. Odrediti zbir $A = 99001$ i $B = 999$ u kodu *vi ak 3*. Pri sabiranju se dobija prekoračenje (označeno sa ***) zbog prenosa na cifarskom mestu najveće težine ($p'_5 = 1$) u prvoj fazi sabiranja.

A_{α}	=	1100	1100	0011	0011	0100
B_{α}	=	0011	0011	1100	1100	1100
P'	=	***1	1	1	1	1
C'_{α}	=	0000	0000	0000	0000	0000

3. Odrediti razliku $A = 1275$ i $B = 452$ u kodu *vi ak 3*. Rezultat $C = A - B = 823$ se dobija primenom sabiranja u potpunom komplementu:

$$\begin{array}{rcl}
 B_{\alpha} & = & 0011 \quad 0011 \quad 0111 \quad 1000 \quad 0101 \\
 [-B_{\alpha}]_{nk} & = & 1100 \quad 1100 \quad 1000 \quad 0111 \quad 1010 \\
 +1 & & & & 0001 \\
 \hline
 [-B_{\alpha}]_{pk} & = & 1100 \quad 1100 \quad 1000 \quad 0111 \quad 1011
 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
 C = A + [B]_{pk} & & \\
 \hline
 A_{\alpha} & = & 0011 \quad 0100 \quad 0101 \quad 1010 \quad 1000 \\
 [-B_{\alpha}]_{pk} & = & 1100 \quad 1100 \quad 1000 \quad 0111 \quad 1011 \\
 \hline
 P' & = & 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \\
 C'_{\alpha} & = & 0000 \quad 0000 \quad 1110 \quad 0010 \quad 0011 \\
 K_{\alpha} & = & 0011 \quad 0011 \quad 1101 \quad 0011 \quad 0011 \\
 \hline
 C_{\alpha} & = & 0011 \quad 0011 \quad 1011 \quad 0101 \quad 0110
 \end{array}$$

U skladu sa pravilima za sabiranje brojeva u potpunom komplementu pojava prenosa $p'_5 = 1$ ne označava prekoračenje.

Množenje i deljenje

1. Odrediti proizvod brojeva $A = -38460$ i $B = -321$ u kodu 8421.

$A = 000038460D, B = 321D$. Rezultat $C = A * B = 012345660C$ može da se dobije formiranjem delimičnih proizvoda.

$$\begin{array}{r}
 2 * 000038460 \\
 \hline
 0 \\
 12 \\
 08 \\
 16 \\
 06 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 \hline
 000076920
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2 * 000038460 \\
 \hline
 0 \\
 12 \quad <--- 2 * 6 = 0C_{16} = 12_{10} \\
 08 \quad <--- 2 * 4 = 08_{16} = 08_{10} \\
 16 \quad <--- 2 * 8 = 10_{16} = 16_{10} \\
 06 \quad <--- 2 * 3 = 06_{16} = 06_{10} \\
 \hline
 000076920
 \end{array}$$

Sabiranjem delimičnih dobija se ukupan proizvod:

$$\begin{array}{r}
 000038460 * 321 \\
 000038460 \\
 00076920 \\
 0115380 \\
 \hline
 012345660
 \end{array}$$

2. Odrediti količnik i ostatak brojeva $A = +12345678$ i $B = -321$ u kodu 8421.

U pakovanom zapisu ovu operaciju možemo da zapišemo kao
 $C = A / B = 012345678C / 321D = 38460D$ uz ostatak 018C

Cifre količnika se određuju upoređivanjem delioca sa početnim delom deljenika. Redosled koraka je:

- (a) Upotrebom operacije poredjenja dobijamo

$$\begin{array}{lll}
 012 < 321 & \text{da} \\
 0123 < 321 & \text{da} \\
 01234 < 321 & \text{ne}
 \end{array}$$

Primenom operacije množenja dobija se da je prva cifra količnika 3.

- (b) Kako je $321 * 3 = 963$, dobijeni proizvod se oduzima od (početka) deljenika i prelazi na određivanje naredne cifre.

$$012345678 / 321 = 3$$

$$\begin{array}{r} 963 \\ \hline 2715 \end{array} \quad 2715 < 321 \quad \text{ne}$$

Naredna cifra je 8. Ostale cifre se dobijaju na isti način.

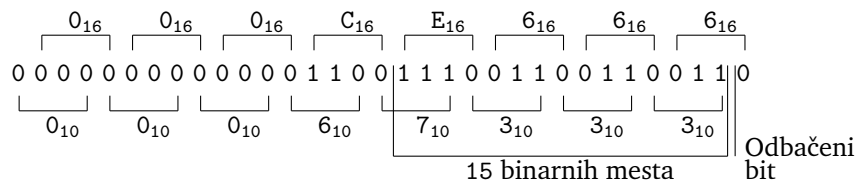
- (c) $012345678 / 321 = 38460$

$$\begin{array}{r} 963 \\ \hline 2715 \\ \hline 2568 \\ \hline 1476 \\ \hline 1284 \\ \hline 1927 \\ \hline 1926 \\ \hline 018 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2715 > 321, \\ 1476 > 321, \\ 1927 > 321, \\ 018 < 321, \end{array} \quad \begin{array}{l} [2715/321] = 8, \\ 8 * 321 = 2568 \\ [1476/321] = 4, \\ 4 * 321 = 1284 \\ [1927/321] = 6, \\ 6 * 321 = 1926 \\ [018/321] = 0 \end{array}$$

Pošto nema više cifara u deljeniku, količnik je -38460 a ostatak +18.

Realni brojevi u nepokretnom zarezu

1. Nekorektno smeštanje tačke osnove.



Slika 5: Uticaj nekorektne deklaracije na tačnost zapisa

2. Nekorektno skaliranje pri aritmetičkim operacijama.

6	4	4	C	Originalne	6	4	4	C	Vrednosti poravnate
0	3	5	C	vrednosti	3	5	0	C	za sabiranje
					9	6	5	C	Zbir

Slika 6: Poravnanje pri sabiranju pakovanih brojeva