15. ČEBIŠOVLJEVI POLINOMI

Ako je zadata funkcija $f(x)$, odsečak interpolacije $[a, b]$ koji sadrži čvorove interpolacije i stepen n interpolacionog polinoma $P_n(x)$, onda se greška interpolacije $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ može zapisati u sledećem obliku

$$R_n(x) = K \cdot \Pi_{n+1}(x),$$

gde je $\Pi_{n+1}(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$. Dakle, greška u ovim zadatim uslovima zavisi od izbora čvorova interpolacije. Sada se postavlja sledeći zadatak: Kako treba izabrati čvorove interpolacije x_i, $i = \overline{0, n}$, da bi greška interpolacije bila minimalna? Pokazano je da je za čvorove interpolacije najbolje uzeti nule Čebišovljevog (П. Л. Чебышёв, 1821–1894) polinoma.

Čebišovljev polinom $T_n(x)$ se definiše na sledeći način:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_{n+1}(x) = 2x \cdot T_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Navedimo nekoliko prvih Čebišovljevih polinoma:

$$\begin{aligned} &T_0(x) = 1, \\ &T_1(x) = x, \\ &T_2(x) = 2x^2 - 1, \\ &T_3(x) = 4x^3 - 3x, \\ &T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1, \\ &T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x, \ldots \end{aligned}$$

Može se primetiti sledeće:

1) koeficijent uz x^n polinoma $T_n(x)$ je jednak 2^{n-1}, $n \geq 1$;

2) $T_{2n}(x)$ su parne funkcije;

3) $T_{2n+1}(x)$ su neparne funkcije;

4) za $|x| \leq 1$ je $|T_n(x)| \leq 1$.

Dokažimo osobinu 4). Ako u trigonometrijski identitet

$$\cos((n+1)X) = 2 \cdot \cos X \cdot \cos nX - \cos((n-1)X)$$

stavimo $X = \arccos x$, onda ćemo dobiti

$$\cos((n+1)\arccos x) = 2 \cdot x \cdot \cos(n \cdot \arccos x) - \cos((n-1)\arccos x),$$

pa možemo zaključiti da funkcija $\cos(n \cdot \arccos x)$ zadovoljava istu diferencnu jednačinu kao i $T_n(x)$. Kako je još i:

$$\cos(0\cdot\arccos x)=1\equiv T_0(x)\,,\quad \cos(1\cdot\arccos x)=x\equiv T_1(x)$$

to je

$$T_n(x)=\cos(n\cdot\arccos x)\,,\quad n=0,1,2,\ldots$$

Sada je jednostavno zaključiti da važi osobina 4).

Rekurentna relacija, diferencna jednačina,

$$T_{n+1}(x)=2x\cdot T_n(x)-T_{n-1}(x)\,,\quad n=0,1,2,\ldots$$

ima karakterističnu jednačinu

$$\lambda^2=2x\lambda-1\,,$$

a odavde je

$$\lambda_{1,2}=x\pm\sqrt{x^2-1}\,.$$

Za $|x|\neq 1$ imamo da je $\lambda_1\neq\lambda_2$, pa je opšte rešenje diferencne jednačine

$$T_n(x)=C_1\cdot\lambda_1^n+C_2\cdot\lambda_2^n\,,\quad n=0,1,2,\ldots\,,$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante. Iz početnih uslova $T_0(x)=1$ i $T_1(x)=x$ nalazimo $C_1=C_2=\dfrac{1}{2}$, pa je

$$T_n(x)=\frac{1}{2}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right],\quad n=0,1,2,\ldots\,,$$

što je još jedan mogući način zadavanja Čebišovljevih polinoma.

Iz jednačine

$$T_n(x)\equiv\cos(n\cdot\arccos x)=0$$

dobijamo nule:

$$x_k=\cos\frac{2k+1}{2n}\pi\,,\quad k=0,1,\ldots,\overline{n-1}\,.$$

Tačke ekstremuma na segmentu [–1, 1] su one tačke za koje je $|T_n(x)|=1$, dakle:

$$x_{(k)}=\cos\frac{k}{n}\pi\,,\quad k=\overline{0,n}$$

i pri tome je

$$T_n(x_{(k)})=\cos k\pi=(-1)^k\,.$$

Polinom

$$\overline{T}_n(x)=2^{1-n}\cdot T_n(x)=x^n+\cdots$$

za $x\in[-1,1]$ najmanje odstupa od nule.

Teorema. Ako je $P_n(x) = x^n + \cdots$, onda je

$$\max_{x\in[-1,\,1]} |P_n(x)| \geq \max_{x\in[-1,\,1]} |\overline{T}_n(x)| = 2^{1-n}, \;\; n \geq 1 .$$

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da je

$$\max |P_n(x)| < \max |\overline{T}_n(x)| = 2^{1-n}, \quad x \in [-1, 1] .$$

Posmatrajmo razliku

$$Q(x) = \overline{T}_n(x) - P_n(x) ;$$

očigledno je stepen polinoma $Q(x)$ najviše jednak $n-1$ i pri tome je

$$\operatorname{sign}(\overline{T}_n(x_{(k)}) - P_n(x_{(k)})) = \operatorname{sign}((-1)^k \cdot 2^{1-n} - P_n(x_{(k)})) = (-1)^k , \quad k = \overline{0, n}$$

jer je $P_n(x_{(k)}) < 2^{1-n}$ za svako k. Na taj način imamo da polinom $Q(x)$ između svake dve uzastopne tačke $x_{(k)}$ i $x_{(k+1)}$ menja znak, odnosno, između $x_{(k)}$ i $x_{(k+1)}$ ima bar jednu nulu. Dakle, polinom Q ima bar n nula, a to je protivurečno, jer polinom Q ima najviše $n-1$ nulu. Drugim rečima, mora biti

$$\max |P_n(x)| \geq \max |\overline{T}_n(x)| = 2^{1-n}, \quad x \in [-1, 1] .$$

Na taj način zaključujemo sledeće: od svih polinoma n–tog stepena koji imaju uz x^n koeficijent 1 najmanje odstupa od nule na segmentu [–1, 1] Čebišovljev polinom $\overline{T}_n(x)$. ■

Ako posmatramo odsečak $[a, b]$, onda je odgovarajući polinom

$$\overline{T}_n\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right) = \left(\frac{2}{b-a}\right)^n x^n + \cdots$$

i

$$\overline{T}_n^{[a,\,b]}(x) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^n \cdot 2^{1-n} \cdot \overline{T}_n\left(\frac{2x-(b+a)}{b-a}\right) = x^n + \cdots$$

Dakle, važi

$$\max_{x\in[a,\,b]} |P_n(x)| \geq \max_{x\in[a,\,b]} |\overline{T}_n^{[a,\,b]}(x)| = (b-a)^n \cdot 2^{1-2n} ,$$

gde je $P_n(x) = x^n + \cdots$ proizvoljan polinom.

Nule polinoma $\overline{T}_n^{[a,b]}(x)$ su

$$x_k = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot \cos\frac{2k+1}{2n}\pi, \quad k = \overline{0, \overline{n-1}}.$$

Greška interpolacije je

$$|R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \cdot 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}$$