

UVOD U MATEMATIČKU LOGIKU

ZADACI ZA VEŽBE

1. ISKAZNA ALGEBRA

Ostrvo Istinozboraca i Lažova je sledeći logički kontekst. Pretpostavimo da se nalazimo na ostrvu na kome žive dva plemena: pleme Istinozboraca i pleme Lažova. Svaki stanovnik ostrva nalazi se u tačno jednom od ovih plemena. Stanovnici ostrva po svemu su isti, osim što Istinozborci uvek govore istinu, a Lažovi uvek lažu.

- 1.1. Neka je a istinitosna vrednost iskaza „ A je Istinozborac”, gde je A osoba sa Ostrva Istinozboraca i Lažova. Ako je poznato da je A izjavio iskaz tačnosti p , dokazati da je $a = p$.
- 1.2. Nalazimo se u društvu stanovnika A, B, C, D, E i F Ostrva Istinozboraca i Lažova. Poznato je da su neki od njih dali sledeće iskaze:

A : B i F su Lažovi.

B : Bar jedan od C i D je Lažov.

C : E je Lažov ili je F Istinozborac.

D : Ako je E Lažov, onda je F Istinozborac.

E : F je Lažov, a C je Istinozborac.

Kojim plemenima pripadaju ovi stanovnici?

- 1.3. Nalazimo se u društvu stanovnika A, B, C, D, E i F Ostrva Istinozboraca i Lažova. Poznato je da su neki od njih dali sledeće iskaze:

A : E i F nisu iz istog plemena.

B : F i E su iz istog plemena.

C : Tačno jedan od A i E je Lažov.

D : E je Lažov, a B je Istinozborac.

E : Ili je B Lažov ili je D Istinozborac.

Kojim plemenima pripadaju ovi stanovnici?

- 1.4. Da li postoji iskaz koji nijedan stanovnik na Ostrvu Istinozboraca i Lažova ne može da izgovori?
- 1.5. Koje pitanje stranac na Ostrvu Istinozboraca i Lažova treba da postavi stanovniku A kako bi iz njegovog odgovora sa sigurnošću mogao da zaključi iz kog je A plemena? Stanovniku A dozvoljeno je da odgovori samo sa da ili ne.
- 1.6. Stranac na Ostrvu Istinozboraca i Lažova sreće osobe A i B i pita osobu A „Da li ste oboje Lažovi?”. Osoba A je dala jedan od odgovora da ili ne, i stranac je na osnovu toga zaključio kojim plemenima pripadaju A i B . Kojim plemenima pripadaju A i B , i šta je osoba A odgovorila?
- 1.7. Stranac na Ostrvu Istinozboraca i Lažova sreće osobe A i B i pita osobu A „Da li ste oboje Lažovi?”. Osoba A je dala jedan od odgovora da ili ne, ali stranac ne može da zaključi kojim plemenima pripadaju A i B , pa postavlja drugo pitanje osobi A „Da li ste iz istog plemena?”. Osoba A ponovo daje odgovor da ili ne. Ovoga puta stranac je zaključio kojim plemenima pripadaju A i B . Kojim plemenima pripadaju A i B , i šta je osoba A odgovorila?

Na *Ostrvu Špijuna i Lažova* žive dva plemena: Špijuni i Lažovi. Kao i ranije, svaki stanovnik je u tačno jednom od plemena, Lažovi uvek lažu, a Špijuni govore istinu kada pričaju sa osobom iz svog plemena, a lažu kada pričaju sa osobom iz drugog plemena. Osim ovih osobina, stanovnici se ni po čemu drugom ne razlikuju.

- 1.8. Neka su a i b istinitosne vrednosti iskaza „ A je Špijun.” i „ B je Špijun.”, gde su A i B osobe sa Ostrva Špijuna i Lažova. Ako je poznato da je A rekao B -u iskaz tačnosti p , dokazati da je $a \wedge b = p$.
- 1.9. Nalazimo se u društvu stanovnika A, B, C, D, E i F Ostrva Špijuna i Lažova. Poznato je da su izrečeni sledeći iskazi:

A je rekao B -u: Ako je C Špijun, onda je F Lažov.
 B je rekao C -u: D je Špijun ili je A Lažov.
 C je rekao D -u: Bar jedan od F i B je Lažov.
 D je rekao E -u: Ako je A Špijun, onda je i F Špijun.

Kojim plemenima pripadaju ovi stanovnici?

- 1.10. Nalazimo se u društvu stanovnika A, B, C, D, E i F Ostrva Špijuna i Lažova. Poznato je da su izrečeni sledeći iskazi:

A je rekao B -u: F je Špijun, a C je Lažov.
 B je rekao C -u: Ako je A Lažov, onda je i F Lažov.
 C je rekao D -u: B i E su iz istog plemena.
 D je rekao E -u: F je Špijun ili je C Lažov.

Kojim plemenima pripadaju ovi stanovnici?

- 1.11. Naći primer iskaza koji na Ostrvu Špijuna i Lažova:
- nijedan Špijun ne može da kaže (ali Lažov može);
 - nijedan Lažov ne može da kaže (ali Špijun može);
 - nijedan Špijun ne može da čuje (ali Lažov može);
 - nijedan Lažov ne može da čuje (ali Špijun može);
 - niko ne može da kaže.

Na *Ostrvu Istinozboraca i Špijuna* žive pleme Istinozboraca koje kao i ranije uvek govori istinu, i pleme Špijuna, koje kao i ranije govore istinu samo osobama iz svog plemena.

- 1.12. Neka su a i b istinitosne vrednosti iskaza „ A je Istinozborac.” i „ B je Istinozborac.”, gde su A i B osobe sa Ostrva Istinozboraca i Špijuna. Ako je poznato da je A rekao B -u iskaz tačnosti p , dokazati da je $b \rightarrow a = p$.
- 1.13. Nalazimo se u društvu stanovnika A, B, C, D, E i F Ostrva Istinozboraca i Špijuna. Poznato je da su izrečeni sledeći iskazi:

A je rekao B -u: E je Istinozborac ili je C Špijun.
 B je rekao C -u: A je Istinozborac, a D je Špijun.
 C je rekao D -u: F i A su Špijuni.
 D je rekao E -u: Ili je A Istinozborac ili je F Špijun.

Kojim plemenima pripadaju ovi stanovnici?

- 1.14. Naći primer iskaza koji na Ostrvu Istinozboraca i Špijuna:
- nijedan Istinozborac ne može da kaže (ali Špijun može);
 - nijedan Špijun ne može da kaže (ali Istinozborac može);
 - nijedan Istinozborac ne može da čuje (ali Špijun može);
 - nijedan Špijun ne može da čuje (ali Istinozborac može);
 - niko ne može da kaže.

Na *Ostrvu Istinozboraca i Duplih agenata* žive pleme Istinozboraca, koji kao i ranije uvek govore istinu, i pleme Duplih agenata, koji govore istinu osobama koje nisu iz istog plemena, a lažu osobe iz svog plemena.

- 1.15. Neka su a i b istinitosne vrednosti iskaza „ A je Istinozborac.” i „ B je Istinozborac.”, gde su A i B osobe sa Ostrva Istinozboraca i Duplih agenata. Ako je poznato da je A rekao B -u iskaz tačnosti p , dokazati da je $a \vee b = p$.

- 1.16. Nalazimo se u društvu stanovnika A, B, C, D, E i F Ostrva Istinozboraca i Duplih agenata. Poznato je da su izrečeni sledeći iskazi:

A je rekao B -u: F i D su Istinozborci.

B je rekao C -u: D i E su iz istog plemena.

C je rekao D -u: Bar jedan od F i A je Dupli agent.

D je rekao E -u: C je Istinozborac, a B je Dupli agent.

Kojim plemenima pripadaju ovi stanovnici?

- 1.17. Naći iskaz koji na Ostrvu Istinozboraca i Duplih agenata:

- a) nijedan Istinozborac ne može da kaže (ali Dupli agent može);
- b) nijedan Dupli agent ne može da kaže (ali Istinozborac može);
- c) nijedan Istinozborac ne može da čuje (ali Dupli agent može);
- d) nijedan Dupli agent ne može da čuje (ali Istinozborac može);
- e) niko ne može da kaže.

Na *Ostrvu Duplih agenata i Lažova* žive pleme Duplih agenata, koji kao i ranije govore istinu samo osobama koje nisu iz istog plemena, i pleme Lažova, koji kao i ranije uvek lažu.

- 1.18. Neka su a i b istinitosne vrednosti iskaza „ A je Dupli agent.” i „ B je Dupli agent.”, gde su A i B osobe sa Ostrva Duplih agenata i Lažova. Ako je poznato da je A rekao B -u iskaz tačnosti p , odrediti p u zavisnosti od a i b .

- 1.19. Naći iskaz koji na Ostrvu Duplih agenata i Lažova:

- a) nijedan Lažov ne može da kaže (ali Dupli agent može);
- b) nijedan Dupli agent ne može da kaže (ali Lažov može);
- c) nijedan Lažov ne može da čuje (ali Dupli agent može);
- d) nijedan Dupli agent ne može da čuje (ali Lažov može);
- e) niko ne može da kaže.

Na *Ostrvu Duplih agenata i Špijuna* žive pleme Duplih agenata, koji kao i ranije govore istinu samo osobama koje nisu iz istog plemena, i pleme Špijuna, koji kao i ranije govore istinu samo osobama iz svog plemena.

- 1.20. Neka su a i b istinitosne vrednosti iskaza „ A je Dupli agent.” i „ B je Dupli agent.”, gde su A i B osobe sa Ostrva Duplih agenata i Špijuna. Ako je poznato da je A rekao B -u iskaz tačnosti p , odrediti p u zavisnosti od a i b .

- 1.21. Naći iskaz koji na Ostrvu Duplih agenata i Špijuna niko ne može da kaže.

- 1.22. Da li na Ostrvu Duplih agenata i Špijuna postoji iskaz koji:

- a) Dupli agent može, a Špijun ne može da kaže;
- b) Dupli agent ne može, a Špijun može da kaže?

Na *Ostrvu Severnih i Južnih Špijuna* živi pleme Severnih Špijuna i pleme Južnih Špijuna. Svaki stanovnik govori istinu samo osobama iz svog plemena.

- 1.23. Neka su a i b istinitosne vrednosti iskaza „ A je Severni Špijun.” i „ B je Severni Špijun.”, gde su A i B osobe sa Ostrva Severnih i Južnih Špijuna. Ako je poznato da je A rekao B -u iskaz tačnosti p , odrediti p u zavisnosti od a i b .
- 1.24. Naći iskaz koji na Ostrvu Severnih i Južnih Špijuna:
- nijedan Severni Špijun ne može da kaže (ali Južni može);
 - nijedan Severni Špijun ne može da čuje (ali Južni može);
 - niko ne može da kaže.

Na *Ostrvu Severnih i Južnih Duplih agenata* živi pleme Severnih Duplih agenata i pleme Južnih Duplih agenata. Svaki stanovnik govori istinu samo osobama koje nisu iz njegovog plemena.

- 1.25. Neka su a i b istinitosne vrednosti iskaza „ A je Severni Dupli agent.” i „ B je Severni Dupli agent.”, gde su A i B osobe sa Ostrva Severnih i Južnih Duplih agenata. Ako je poznato da je A rekao B -u iskaz tačnosti p , odrediti p u zavisnosti od a i b .
- 1.26. Naći iskaz koji na Ostrvu Severnih i Južnih Duplih agenata:
- nijedan Severni Dupli agent ne može da kaže (ali Južni može);
 - nijedan Severni Dupli agent ne može da čuje (ali Južni može);
 - niko ne može da kaže.

2. ISKAZNE FORMULE

- 2.1. Napisati istinitosne tablice sledećih formula:

- | | |
|--|--|
| a) $(p \wedge \neg r) \vee (q \wedge \neg r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r)$; | d) $(p \wedge (\neg q \rightarrow \neg p)) \wedge (\neg q \vee \neg r) \rightarrow (r \rightarrow \neg p)$; |
| b) $\neg(p \wedge (q \vee r)) \wedge (r \vee p)$; | e) $(p \wedge (q \rightarrow r)) \vee ((\neg p \rightarrow q \wedge r) \wedge (\neg p \vee q))$; |
| c) $((p \rightarrow q) \rightarrow r) \leftrightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$; | f) $p \rightarrow (q \rightarrow (p \wedge q) \wedge (p \wedge r))$. |

Da li su one zadovoljive, porecive, tautologije ili kontradikcije?

- 2.2. Dokazati da su sledeće formule tautologije:

- | | |
|--|---|
| a) $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \vee q \rightarrow r)$; | d) $(p \wedge q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$; |
| b) $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow q \wedge r)$; | e) $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \vee r \rightarrow q \vee r)$; |
| c) $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow q \vee r)$; | f) $((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)) \rightarrow (p \vee r \rightarrow q \vee s)$. |

- 2.3. Neka su φ i ψ iskazne formule takve da je φ zadovoljiva, ψ poreciva i $\models \varphi \rightarrow \psi$. Dokazati $\mathcal{P}(\varphi) \cap \mathcal{P}(\psi) \neq \emptyset$, tj. φ i ψ imaju bar jedno zajedničko slovo.

- 2.4. Dokazati da su sledeće formule ekvivalentne:

- | | |
|--|--|
| a) $\neg(\neg p \rightarrow q) \vee (p \wedge q) \vee p \vee q \rightarrow p \wedge q$; | c) $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow r)$ i $(p \leftrightarrow \neg q) \leftrightarrow (p \leftrightarrow \neg r)$; |
| b) $(p \rightarrow q) \rightarrow r$ i $(p \wedge \neg q) \vee r$; | d) $p \leftrightarrow (q \vee r)$ i $p \vee (q \leftrightarrow r)$. |

- 2.5. Koristeći ekvivalentne transformacije dokazati da su sledeće formule tautologije:

- | | |
|--|--|
| a) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$; | c) $(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \vee q \rightarrow r)$; |
| b) $(p \leftrightarrow q) \vee (p \leftrightarrow \neg q)$; | d) $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r))$. |

- 2.6. Odrediti neku DNF i neku KNF sledećih formula:

- | | |
|---|--|
| a) $(p \leftrightarrow q) \rightarrow r$; | c) $((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow s$; |
| b) $(p \rightarrow q \vee r) \wedge (r \rightarrow \neg p)$; | d) $p \wedge q \leftrightarrow r \vee s$. |

- 2.7. Zapisati KDNF i KKNF formule $\varphi = \varphi(p, q, r)$ (u formuli φ javljaju se slova p, q, r) ako je φ tačna samo u valuacijama u kojima su:

- | | |
|--------------------------|-------------------------------|
| a) sva tri slova tačna; | c) samo jedno slovo tačno; |
| b) samo dva slova tačna; | d) neparno mnogo slova tačno. |

- 2.8. Odrediti sve međusobno neekvivalente formule $\varphi = \varphi(p, q, r)$ takve da je formula $\theta = (p \wedge q \leftrightarrow \varphi) \rightarrow q \wedge r$ tautologija.
- 2.9. Odrediti sve međusobno neekvivalente formule $\varphi = \varphi(p, q, r)$ takve da je formula $\theta = ((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \varphi) \wedge (r \rightarrow \varphi)$ kontradikcija.
- 2.10. Koliko ima neekvivalentnih parova formula $\varphi = \varphi(p, q)$ i $\psi = \psi(p, q)$ takvih da je formula $\theta = (\varphi \rightarrow p) \vee (\psi \wedge q)$ tautologija? Ako je ψ kontradikcija, odrediti sve formule φ takve da je θ tautologija.
- 2.11. Dokazati da su sledeći skupovi potpuni:
- a) $\{\neg, \wedge\}$; d) $\{\perp, \rightarrow\}$; g) $\{\perp, \wedge, \leftrightarrow\}$; j) $\{\vee, \vee, \leftrightarrow\}$; m) $\{\downarrow\}$.
b) $\{\neg, \vee\}$; e) $\{\vee, \rightarrow\}$; h) $\{\top, \vee, \vee\}$; k) $\{\wedge, \vee, \leftrightarrow\}$;
c) $\{\neg, \rightarrow\}$; f) $\{\perp, \vee, \leftrightarrow\}$; i) $\{\top, \wedge, \vee\}$; l) $\{\mid\}$;
- 2.12. Označimo sa $\nrightarrow$ veznik dat ekvivalencijom $p \nrightarrow q \Leftrightarrow \neg(p \rightarrow q)$, odnosno tablicom:

p	q	$p \nrightarrow q$
T	T	N
T	N	T
N	T	N
N	N	N

Dokazati da su sledeći skupovi potpuni:

- a) $\{\neg, \nrightarrow\}$; b) $\{\top, \nrightarrow\}$; c) $\{\rightarrow, \nrightarrow\}$; d) $\{\leftrightarrow, \nrightarrow\}$.
- 2.13. Dokazati da sledeći skupovi nisu potpuni:
- a) $\{\top, \perp, \wedge, \vee\}$; b) $\{\top, \perp, \neg, \vee, \leftrightarrow\}$; c) $\{\top, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$; d) $\{\perp, \wedge, \vee, \nrightarrow, \vee\}$.
- 2.14. Neka je $\diamond$ proizvoljan binaran veznik (zadat jednom od šesnaest mogućih tablica). Ako je $\{\diamond\}$ potpun, dokazati da je $\diamond = \mid$ ili $\diamond = \downarrow$.