ТЕОРЕМА О ЕКСТРЕМАЛНИМ ТИПОВИМА (Гнеденко 1943, де Хан 1970)

НЕКА ЈЕ $(X_n)$ НИЗ НЕЗАВИСНИХ СЛУЧАЈНИХ ВЕЛИЧИНА СА ЗАЈЕДНИЧКОМ ФУНКЦИЈОМ РАСПОДЕЛЕ $F$ И НЕКА ЈЕ $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$. АКО ПОСТОЈЕ НИЗОВИ КОНСТАНТИ $a_n > 0$ И $b_n \in R$, $n \in N$, ТАКВИ ДА ВАЖИ

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{M_n - b_n}{a_n} \le x\right\} = \lim_{n\to\infty} F^n(a_n x + b_n) = G(x) \text{ ЗА СВАКО } x \in C(G), \quad (1)$$

ГДЕ ЈЕ $G$ НЕДЕГЕНЕРИСАНА ФУНКЦИЈА РАСПОДЕЛЕ, ТАДА ЈЕ $G$ ИСТОГ ТИПА КАО НЕКА ОД ФУНКЦИЈА РАСПОДЕЛЕ ЕКСТРЕМНИХ ВРЕДНОСТИ $G_0$, $G_{1,\alpha}$, $G_{2,\alpha}$ $(\alpha > 0)$.

ДОКАЗ: ИЗ (1) СЛЕДИ ДА ЗА СВАКО ФИКСИРАНО $t > 0$ ПРИ $n \to \infty$ ВАЖИ:

$$F^{[nt]}(a_{[nt]} x + b_{[nt]}) \Rightarrow G(x) \quad (2)$$

$$F^{[nt]}(a_n x + b_n) = (F^n(a_n x + b_n))^{[nt]/n} \Rightarrow G^t(x) \quad (3)$$

НА ОСНОВУ ХИНЧИНОВЕ ТЕОРЕМЕ О ИЗБОРУ НОРМИРАЈУЋИХ КОНСТАНТИ ИЗ РЕЛАЦИЈА (2) И (3) СЛЕДИ ДА ПОСТОЈЕ КОНСТАНТЕ $u(t) > 0$ И $v(t) \in R$, $t > 0$, ТАКВЕ ДА ВАЖЕ ЈЕДНАКОСТИ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{[nt]}} = u(t), \quad \lim_{n\to\infty} \frac{b_n - b_{[nt]}}{a_{[nt]}} = v(t) \quad (4)$$

$$G^t(x) = G(u(t)x + v(t)). \quad (5)$$

АКО СУ ЧЛАНОВИ НИЗА $(a_n)$ (ОДНОСНО $(b_n)$) МЕЂУСОБНО РАЗЛИЧИТИ, ОНДА ЈЕ

$$\{t : a_{[nt]} = a_k\} = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)$$

$$\{t : b_{[nt]} = b_k\} = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right)$$

ПА СЛЕДИ ДА СУ $a_{[nt]}$ И $b_{[nt]}$ МЕРЉИВЕ ФУНКЦИЈЕ ПО АРГУМЕНТУ $t$. ДАЉЕ ЗАКЉУЧУЈЕМО ИЗ (4) ДА СУ $u(t)$ И $v(t)$ ТАКОЂЕ МЕРЉИВЕ ФУНКЦИЈЕ КАО ГРАНИЧНЕ ВРЕДНОСТИ НИЗА МЕРЉИВИХ ФУНКЦИЈА. СЛИЧНО СЕ ДОКАЗУЈЕ ДА СУ $u(t)$ И $v(t)$ МЕРЉИВЕ ФУНКЦИЈЕ И АКО МЕЂУ ЧЛАНОВИМА НИЗА $a_n$ (ИЛИ $(b_n)$) ИМА ЈЕДНАКИХ БРОЈЕВА.

КОРИСТЕЋИ (5) ДОБИЈАМО ДА ЗА $t > 0$ И $s > 0$ ВАЖЕ ЈЕДНАКОСТИ:

$$G^{ts}(x) = G(u(ts)x + v(ts)) \quad (6)$$

$$G^{ts}(x) = (G^s(x))^t = G^t(u(s)x + v(s))$$
$$= G(u(t)(u(s)x + v(s)) + v(t)) = G(u(t)u(s)x + u(t)v(s) + v(t)) \quad (7)$$

КАКО ЈЕ $G$ НЕДЕГЕНЕРИСАНА ФУНКЦИЈА РАСПОДЕЛЕ, ТО ДОБИЈАМО ДА ЗА СВЕ ВРЕДНОСТИ $t > 0$ И $s > 0$ ВАЖИ

$$u(ts) = u(t)u(s) \quad (8)$$

$$v(ts) = u(t)v(s) + v(t) \quad (9)$$

СВЕ КОНАЧНЕ, МЕРЉИВЕ И НЕНЕГАТИВНЕ ФУНКЦИЈЕ КОЈЕ ЗАДОВОЉАВАЈУ ЈЕДНАЧИНУ (8) ДАТЕ СУ СА

$$u(t) = t^{-\rho}, \quad \rho \in R. \quad (10)$$

РАЗМОТРИЋЕМО СЛУЧАЈЕВЕ $\rho = 0$ И $\rho \ne 0$ (СА ПОДСЛУЧАЈЕВИМА $\rho > 0$ И $\rho < 0$).

(а) Случај $\rho = 0$. Тада је $u(t) = t^0 = 1$ за свако $t>0$, па из (9) следи

$$v(ts) = v(t) + v(s). \tag{11}$$

Сва решења једначине (11) дата су са

$$v(t) = -c\ln t, \quad t>0, \quad c\in\mathbb{R}. \tag{12}$$

Сада једнакост (5) прима облик

$$G^t(x) = G(x - c\ln t). \tag{13}$$

С обзиром на то да једнакост (13) важи за сваки реалан број $x$, закључујемо да је $c\neq 0$. (У супротном би $G$ била дегенерисана ф-ја р.) Константа $c$ мора да буде већа од 0, јер је за фиксирано $x$, функција $G^t(x)$ опадајућа по аргументу $t>0$.

Докажимо да за свако $x\in\mathbb{R}$ важи $0 < G(x) < 1$.

Ако за неко $x_0\in\mathbb{R}$ важи $G(x_0) = 0$, онда из (13) добијамо да је за свако $t>0$,

$$0 = G^t(x_0) = G(x_0 - c\ln t),$$

па следи да је $G(y) = 0$ за свако $y\in\mathbb{R}$, а то је контрадикција.

Слично, ако за неко $x_0\in\mathbb{R}$ важи $G(x_0) = 1$, онда за свако $t>0$ важи

$$1 = G^t(x_0) = G(x_0 - c\ln t)$$

па следи да за свако $y\in\mathbb{R}$ важи $G(y) = 1$, а то је опет контрадикција.

За $x = 0$ из једнакости (13) добијамо да за свако $t>0$ важи

$$G^t(0) = G(-c\ln t). \tag{14}$$

Означимо $G(0) = e^{-e^{-h}}$ и $y = -c\ln t$.

Приметимо да када променљива $t$ пролази скупом $(0, +\infty)$, онда променљива $y = -c\ln t$ пролази читавим скупом $\mathbb{R}$. Из једнакости (14) добијамо да за свако $y\in\mathbb{R}$ важи

$$G(y) = G^t(0) = e^{-te^{-h}} = \exp\left\{-e^{-\frac{y}{c}}e^{-h}\right\} = \exp\left\{-e^{-\left(\frac{y}{c}+h\right)}\right\}$$

односно, функција расподеле $G$ је истог типа као Гумбелова функција расподеле екстремних вредности $G_0$.

(δ) СЛУЧАЈ $\rho \neq 0$. ИЗ (10) ДОБИЈАМО ДА ЈЕ $u(1)=1$ И $u(t)\neq 1$ ЗА $t>0,\ t\neq 1$. ИЗ ЈЕДНАКОСТИ (9) ДОБИЈАМО ДА ЈЕ

$$u(t)v(s)+v(t) = u(s)v(t)+v(s)$$

ПА ЗА $t\neq 1$ И $s \neq 1$ ДОБИЈАМО $v(t)(1-u(s)) = v(s)(1-u(t))$, ОДНОСНО

$$\frac{v(t)}{1-u(t)} = \frac{v(s)}{1-u(s)} = \text{const} = c. \qquad (15)$$

КОРИСТЕЋИ (10), ТЈ $u(t)=t^{-\rho}$, ДОБИЈАМО ИЗ (15) ДА ВАЖИ

$$v(t) = c(1-u(t)) = c(1-t^{-\rho}). \qquad (16)$$

КОРИСТЕЋИ (5) И (16) ДОБИЈАМО ДА ЈЕ

$$G^t(x) = G(xt^{-\rho}+c(1-t^{-\rho})) = G((x-c)t^{-\rho}+c)$$

ОДАКЛЕ СЛЕДИ $G^t(x+c) = G(xt^{-\rho}+c)$. ОЗНАЧИМО $H(x)=G(x+c)$. КАКО СУ ФУНКЦИЈЕ $G$ И $H$ ИСТОГ ТИПА, ДОВОЉНО ЈЕ РЕШИТИ СЛЕДЕЋУ ФУНКЦИОНАЛНУ ЈЕДНАЧИНУ ПО НЕПОЗНАТОЈ И НЕДЕГЕРИСАНОЈ ФУНКЦИЈИ РАСПОДЕЛЕ $H$:

$$H^t(x) = H(xt^{-\rho}), \quad t>0, \quad x\in R \qquad (17)$$

ЗА $x=0$ ИЗ (17) СЛЕДИ ДА ЗА СВАКО $t>0$ ВАЖИ $H^t(0)=H(0)$, ПА ДАЉЕ ДОБИЈАМО ДА ЈЕ $H(0)=0$ ИЛИ $H(0)=1$.

ПОДСЛУЧАЈ $\rho>0$. ДОКАЖИМО ДА НИЈЕ $H(0)=1$. АКО ЈЕ $H(0)=1$, ОНДА ПОСТОЈИ $x_0<0$, ТАКО ДА ЈЕ $0<H(x_0)<1$. ТАДА ЈЕ

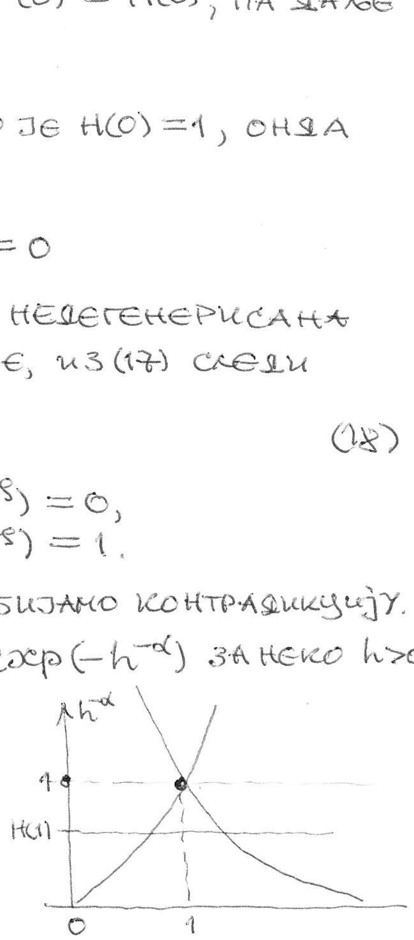
$$\lim_{x\to 0-} H(x) = \lim_{t\to\infty} H(x_0 t^{-\rho}) = \lim_{t\to\infty} H^t(x_0) = 0$$

ШТО ЈЕ У КОНТРАДИКЦИЈИ СА ПРЕТПОСТАВКОМ ДА ЈЕ $H$ НЕДЕГЕНЕРИСАНА ФУНКЦИЈА РАСПОДЕЛЕ. ПРЕМА ТОМЕ, $H(0)=0$. ДАЉЕ, ИЗ (17) СЛЕДИ

$$H^t(1) = H(t^{-\rho}), \quad t>0. \qquad (18)$$

АКО ЈЕ $H(1)=0$, ОНДА ЗА СВАКО $t>0$ ВАЖИ $H(t^{-\rho})=0$,
АКО ЈЕ $H(1)=1$, ОНДА ЗА СВАКО $t>0$ ВАЖИ $H(t^{-\rho})=1$.
КАКО ЈЕ $\{t^{-\rho}: t>0\} = (0,+\infty)$, ТО У ОБА СЛУЧАЈА ДОБИЈАМО КОНТРАДИКЦИЈУ.
ПРЕМА ТОМЕ: $0<H(1)<1$. ОЗНАЧИМО $\alpha=\rho^{-1}$, $H(1)=\exp(-h^{-\alpha})$ ЗА НЕКО $h>0$, $y=t^{-\rho}$ $(t=y^{-1/\rho}=y^{-\alpha})$. ЗА $y>0$ ИЗ (18) ДОБИЈАМО

$$H(y) = e^{-th^{-\alpha}} = e^{-y^{-\alpha}h^{-\alpha}} = e^{-(hy)^{-\alpha}} = G_{1,\alpha}(hy)$$




ПРЕМА ТОМЕ ФУНКЦИЈА $H$ ЈЕ ИСТОГ ТИПА КАО $G_{1,\alpha}$. СЛЕДИ ДА ЈЕ И $G$ ИТОГ ТИПА КАО $G_{1,\alpha}$, ГДЕ ЈЕ $\alpha>0$.

ПОДСЛУЧАЈ $\rho<0$. ДОКАЖИМО ДА НИЈЕ $H(0)=0$. АКО БИ БИЛО $H(0)=0$, ОНДА БИ ПОСТОЈАО БРОЈ $x_0>0$, ТАКАВ ДА ЈЕ $0<H(x_0)<1$. ТАДА ЈЕ

$$\lim_{x\to\infty} H(x) = \lim_{t\to\infty} H(x_0 t^{-\rho}) = \lim_{t\to\infty} H^t(x_0) = 0$$

ШТО ЈЕ КОНТРАДИКЦИЈА. ПРЕМА ТОМЕ, $H(0)=1$. ИЗ (17) ДОБИЈАМО

$$H^t(-1) = H(-t^{-\rho}), \quad t>0. \tag{19}$$

АКО ЈЕ $H(-1)=0$, ОНДА ЗА СВАКО $t>0$ ВАЖИ $H(-t^{-\rho})=0$

АКО ЈЕ $H(-1)=1$, ОНДА ЗА СВАКО $t>0$ ВАЖИ $H(-t^{-\rho})=1$.

У ОБА СЛУЧАЈА СМО ДОБИЛИ КОНТРАДИКЦИЈУ ЈЕР ЈЕ $\{-t^{-\rho} \mid t>0\}=(-\infty,0)$.

ПРЕМА ТОМЕ, $0<H(-1)<1$.

ОЗНАЧИМО: $\alpha=-\rho^{-1}$, $H(-1)=e^{-(-h)^{\alpha}}$ ЗА НЕКО $h<0$

$$y=-t^{-\rho} \quad \left(t=(-y)^{-1/\rho}=(-y)^{\alpha}\right).$$

САДА ЗА $y<0$ ИЗ (19) ДОБИЈАМО

$$H(y)=e^{-t(-h)^{\alpha}}=e^{-(-y)^{\alpha}(-h)^{\alpha}}=e^{-((-h)y)^{\alpha}}=G_{2,\alpha}((-h)y)$$

ПРЕМА ТОМЕ, ФУНКЦИЈА $H$ ЈЕ ИСТОГ ТИПА КАО ВЕЈБУЛОВА ФУНКЦИЈА РАСПОДЕЛЕ ЕКСТРЕМНИХ ВРЕДНОСТИ $G_{2,\alpha}$, ГДЕ ЈЕ $\alpha>0$.

СЛЕДИ ДА ЈЕ И $G$ ИСТОГ ТИПА КАО $G_{2,\alpha}$, $\alpha>0$.