Аналитичка геометрија

Задаци за практикум 2008/09

1 Вектори у геометрији

1.1 Нека је $ABCD$ паралелограм. Ако су P и Q тачке дефинисане са $\overrightarrow{PD} = 3\overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{QC} = 4\overrightarrow{AQ}$, доказати да су B, P и Q колинеарне.

1.2 Ако је тачка F средиште странице BC паралелограма $ABCD$, а тачка E пресек дужи AF и BD, одредити односе у којима их она дели.

1.3 Нека је тачка E средиште странице AB произвољног четворугла $ABCD$ и нека за тачке F и G редом важи $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AD}$. Ако је тачка S средиште странице CD доказати да су тачке F, G и S колинеарне.

1.4 У простору су дати паралелограми $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$. Ако су тачке A, B, C и D средишта дужи A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 и D_1D_2 различите тачке, доказати да је онда и $ABCD$ паралелограм.

1.5 Доказати да се дужи које спајају средишта наспрамних ивица произвољног тетраедра узајамно полове.

1.6 Нека су тачке M, N и P редом средишта страница BC, CA и AB троугла ABC. Нека је D тачка на страници BC, а тачке E и F редом средишта страница BD и CD. Праве AD и NP секу се у тачки Q. Доказати да је $EFNP$ паралелограм чије се дијагонале секу на дужи MQ.

1.7 Дат је троугао ABC и тачке X_n и Y_n тако да је $\overrightarrow{X_nB} = (n+1)\overrightarrow{AX_n}$ и $\overrightarrow{Y_nC} = n\overrightarrow{AY_n}$, за $n \in \mathbb{N}$. Доказати да постоји тачка која припада свакој од правих X_nY_n ($n \in \mathbb{N}$).

1.8 Тачка P припада страници AB, а права p садржи тачку P и паралелна је тежишној дужи CC_1, произвољног троугла ABC. Ако је $p \cap BC = \{M\}$ и $p \cap AC = \{N\}$ изразити вектор $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}$ преко вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

1.9 Доказати да се симетрале спољашњих углова код темена A и B и симетрала угла код темена C произвољног троугла ABC секу у једној тачки.

1.10 Дат је троугао $\triangle ABC$ и тачке A_1, B_1 и C_1 које припадају редом страницама BC, CA и AB, такве да су дужине изломљених линија ABA_1, BCB_1 и CAC_1 једнаке полуобиму троугла. Доказати да се дужи AA_1, BB_1 и CC_1 секу у једној тачки.

1.11 Користећи скаларни производ доказати да дужи које спајају средишта суседних страница квадрата образују квадрат.

1.12 У правоуглом троуглу ABC, са правим углом код темена C, конструисана је висина CD. Ако је M средиште дужи CD, а N средиште дужи BD, доказати да је $AM \perp CN$.

1.13 Дат је троугао ABC код кога су тежишне дужи из темена A и B међусобно нормалне. Одредити везу између дужина страница троугла.

1.14 Ако се у четвороуглу $ABCD$ дијагонале секу под правим углом, доказати да важи $|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{DC}|^2 = |\overrightarrow{BC}|^2 + |\overrightarrow{AD}|^2$.

1.15 Круг са центром у тачки S додирује праву OA у тачки A, као и праву OB. Одредити вектор $\overrightarrow{OS}$ у функцији од неколинеарних вектора $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.

1.16 Извести формулу за рачунање површине троугла ABC: $2P = \frac{\sin B \sin C}{\sin A}|\overrightarrow{BC}|^2$.

1.17 Дат је произвољан троугао ABC површине P. Нека су тачке A_1, B_1 и C_1 такве да важи $\overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC_1} = \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AB_1} = \overrightarrow{BA}$. Колика је површина троугла $A_1B_1C_1$?

1.18 Израчунати површину троугла одређеног векторима $2\overrightarrow{a} - 3\overrightarrow{b}$ и $3\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}$, ако је $|\overrightarrow{a}| = 2$, $|\overrightarrow{b}| = 3$ и $|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| = 4$.

1.19 Доказати да за компланарне векторе $\overrightarrow{a_j}$, $j = 1, 2, 3, 4$ важи $(\overrightarrow{a_1} \times \overrightarrow{a_2}) \times (\overrightarrow{a_3} \times \overrightarrow{a_4}) = \overrightarrow{0}$.

1.20 Доказати идентитет $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \times (\overrightarrow{b} \times \overrightarrow{c}) = [\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}] \cdot \overrightarrow{b}$.

1.21 Дати систем вектора $\overrightarrow{a}(3, -4, 2)$, $\overrightarrow{b}(6, -8, 5)$ и $\overrightarrow{c}$ одређује паралелепипед чија је висина која одговара страни $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b})$ једнака 2. Одредити целобројне координате вектора $\overrightarrow{c}$, ако је $|\overrightarrow{c}| = \sqrt{14}$ и $\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = 5$.

1.22 Дата је коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$ чија је ивица дужине 4. Нека су тачке M, N и P средишта страна $A_1B_1C_1D_1$, BCC_1B_1 и DCC_1D_1 тим редом. Одредити запремину тетраедра $AMNP$ и вектор висине тетраедра из темена A преко вектора $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.

1.23 Дате су две праве пирамиде са истом основом, квадратом $ABCD$ странице a. Нека су V_1 и V_2 врхови датих пирамида и угао између правих AV_1 и BV_2 једнак $\frac{\pi}{4}$. Ако је висина једне пирамиде једнака a, одредити висину друге пирамиде.

2 Координате вектора и тачака

2.1 Дат је правоугли Декартов координатни систем у равни Oxy. Нова оса Ox' заклапа са старом Ox угао $\frac{\pi}{12}$, а оса Oy' заклапа са осом Ox угао $\frac{\pi}{4}$. Изразити старе координате (x, y) неке тачке преко њених нових координата (x', y').

2.2 Дата су два координатна система исте оријентације Oxy и $O'x'y'$. Први од њих је правоугли, а други са координатним углом $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Оса Ox' заклапа са осом Ox угао $\frac{\pi}{6}$. Почетак новог координатног система O' има координате $(1, -1)$ у старом систему. Наћи везу између старих и нових координата.

2.3 Дата је тачка $(1, -2)$ у односу на косоугли Декартов координатни систем чији је координатни угао $\alpha = \frac{\pi}{6}$. Наћи координате дате тачке у односу на координатни систем чије су осе симетрале углова који граде осе датог система.

2.4 Дат је правоугли Декартов координатни систем. Наћи формуле трансформације ако се његов координатни почетак премести у тачку $(2, 5)$, док се његове осе заротирају за $\frac{\pi}{4}$ у смеру казаљке на сату.

2.5 Дат је тетраедар $ABCD$. Координатни систем има почетак у темену A и координатне векторе $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{AD}$. Други координатни систем има почетак у тежишту T_1 стране BCD, а његови координатни вектори су: $\overrightarrow{a'} = \overrightarrow{T_1A}, \overrightarrow{b'} = \overrightarrow{T_1B}$ и $\overrightarrow{c'} = \overrightarrow{T_1D}$. Одредити координате темена C, тежишта тетраедра T и тежишта стране ACD у оба координатна система.

2.6 Дата су два правоугла координатна система $Oxyz$ и $Ox'y'z'$. Оса Ox' пролази кроз први октант и гради са осама Ox и Oy углове од $\frac{\pi}{3}$. Оса Oy' лежи у равни Oxy и гради са осом Oy оштар угао; оса Oz' је постављена тако да су оба система исте оријентације. Наћи везу између старих и нових координата.

2.7 За координатне векторе првог координатног система узети су вектори $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ који леже на ивицама тетраедра $OABC$, а за координатне векторе другог координатног система вектори који леже на тежишним дужима OM_1, OM_2 и OM_3 страна BOC, COA и OAB, а усмерени су ка тачкама $M_i, i = 1, 2, 3$. Наћи везу између једног и другог координатног система као и координате темена тетраедра у односу на други систем.

2.8 Дата су два Декартова координатна система $Oxyz$ и $Ox'y'z'$. Први систем је правоугли, осе Oz и Oz' се поклапају, док су осе Ox' и Oy' бисектрисе углова $\measuredangle xOy$ и $\measuredangle zOy$. Наћи координате тачке M у односу на други координатни систем ако су јој координате у првом систему $(3, -1, 3)$.

3 Тачка, права и раван

3.1 Одредити једначину равни која садржи тачке $A(1,-2,2)$ и $B(2,3,-1)$ и нормална је на раван $\alpha: 3x-2y+z-6=0$.

3.2 Одредити једначину равни која садржи тачку $A(1,1,1)$ и пресечну праву равни $\alpha: 2x-y+2z-1=0$ и $\beta: x+y-3z+2=0$.

3.3 Одредити вредност параметра λ за коју су равни $\lambda x+(1-\lambda^2)y+4z+7=0$ и $4x-3\lambda y+2\lambda^2 z-5=0$ паралелне.

3.4 Одредити вредност параметра λ за коју су равни $6x+\lambda y-4z=0$ и $x+2y+2\lambda z-3=0$ међусобно нормалне.

3.5 Наћи једначину равни која садржи x–осу и заклапа угао од $\frac{\pi}{6}$ са равни $2x-3y+4z-1=0$.

3.6 Дате су равни $\alpha: x=3+u-v, y=2+3u-v, z=1+u+v$ и $\beta: x=-1+2u+v, y=-3-5u+v, z=4+7u+\lambda v, u,v\in\mathbb{R}$. Одредити λ тако да су оне међусобно нормалне.

3.7 Одредити једначину нормалне пројекције праве $p: -3x+2y-z+1=0, 2x-y+z+5=0$ на раван $\alpha: -x+3y-4z+3=0$.

3.8 Права b је дата као пресек равни $x-y+3z-2=0, 2x-2y-5z+1=0$. Наћи једначине косе пројекције праве b на раван $x+y+z=0$ ако се пројектовање врши паралелно вектору $7\overrightarrow{i}+11\overrightarrow{j}+13\overrightarrow{k}$. Одредити једначине ортогоналне пројекције праве b на исту раван.

3.9 Одредити заједничку нормалу правих $a: x-y+2z-1=0,\ 4x+3y-z+3=0$ и $b: 3x+y-z+2=0,\ 2x-5y+3z-4=0$.

3.10 Одредити једначину равни која садржи тачку $A(-2,3,1)$ и праву l, ако права l садржи тачку $P(0,2,1)$ и сече праву $p: 2x-y+2z=3, x+y+z=0$ под правим углом.

3.11 Одредити једначину равни која је нормална на пресек равни $x+2y=3, -2x+z=1$ и удаљена је од координатног почетка за $\sqrt{21}$.

3.12 Једно теме паралелепипеда је тачка $A(1,1,1)$, а три његове непаралелне стране припадају равнима $x+y+2z-1=0, 2x+y+3z+2=0, x-y-z+3=0$. Одредити једначине равни којима припадају преостале три стране паралелепипеда.

3.13 Наћи једначину равни која полови углове између равни $5x-5y-2z-3=0$ и $x+7y-2z+1=0$.

4 Линије у равни

4.1 Наћи ГМТ у равни за које је однос растојања од тачке $O(0,0)$ и праве $x+y+1=0$ једнако $\sqrt{2}$. Која је то крива?

4.2 Кроз координатни почетак су повучене тетиве на круг $x^2+y^2=2x$. Наћи ГМТ средишта тих тетива.

4.3 Дате су тачке $A(1,2,1)$, $B(0,0,1)$ и $C(1,0,0)$. Шта је ГМТ M када тетраедар $ABCM$ чува запремину?

4.4 Доказати да се елипса и хипербола које имају заједничке жиже секу под правим углом.

4.5 Доказати да површина паралелограма чије су странице конјуговани полудијаметри елипсе не зависи од избора полудијаметара.

4.6 Одредити геометријско место ортогоналних пројекција жиже параболе на њене нормале.

4.7 Одредити једначину параболе која пролази кроз тачке $(0,-\frac{3}{2})$ и $(0,-4)$ и има директрису $2x-y+1=0$.

4.8 Одредити једначину криве другог реда ако су дате жижа $F(2,1)$, одговарајућа директриса $2x+y+3=0$ и тачка $M(1,2)$ која јој припада.

4.9 Одредити једначину криве другог реда која садржи тачку $A(1,0)$ и ако је познат пар конјугованих дијаметара криве: $y = 1$ и $y = x - 1$ и њена тангента $x - y = 0$.

4.10 За криву $2x^2+5xy-3y^2+3x+16y = 0$ наћи пар конјугованих дијаметара од којих је један паралелан са правом $8x + 10y + 7 = 0$.

4.11 Наћи једначину конусног пресека који пролази кроз тачку $(1, 1)$ и ако су му два пара конјугованих дијаметара $2x - 3y = 0, x + 2y = 0$ и $x - y = 0, 3x - 5y = 0$.

4.12 Наћи једначину параболе која додирује x–осу у тачки $(4, 0)$, а y–осу у $(0, 3)$.

4.13 Одредити ГМТ из којих се парабола $p : y^2 = 6x$ види под углом од $\frac{\pi}{4}$.

4.14 Одредити ГМТ из којих се елипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ види под правим углом.

4.15 Доказати да ГМТ једнако удаљених од тачке $M(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ и праве $x + y = 0$ одређено једначином $x^2 - 2xy+y^2-2x-2y+1 = 0$. Ову једначину свести на канонски облик и написати формуле те трансформације.

4.16 Одредити једначину хиперболе чије су жиже $F_1(-11, -10)$и $F_2(13, 14)$ и која садржи тачку $M(\sqrt{2}+1, 9\sqrt{2}+2)$. свести добијену једначину на канонски облик и написати формуле те трансформације.

4.17 Изометријском трансформацијом свести једначину криве $7x^2-8xy+y^2-26x+20y+28 = 0$ на канонски облик и написати формуле те трансформације. Одредити једначине асимптота и координате жижа те криве.

4.18 Трансформисати правоугли координатни систем тако да нове осе буду асимптоте криве $2x^2+3xy-2y^2 - 9x - 11y = 0$.

5 Површи и криве у простору

5.1 Наћи центар и полупречник круга датог једначинама $(x-3)^2+(y-2)^2+(z-2)^2 = 25$, $2x+2y-z-17 = 0$.

5.2 Написати једначине равни које додирују сферу $x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+8 = 0$ и паралелне су равни $x - y + 2z + 5 = 0$.

5.3 Наћи координате центра сфере која додирује равни $\alpha : z + 26 = 0$ и $\beta : x + 14 = 0$ и садржи тачке $A(18, 0, -25)$ и $B(15, 1, 39)$, ако су тражене координате цели бројеви.

5.4 Тетраедар је одређен координатним равнима и равни $x - 10y - 2z = 57$. Наћи центар и полупречник сфере уписане у тај тетраедар.

5.5 Одредити једначину коноидне површи ако је њена оса $o : x = y = z$, директриса $d : x = 3, z = y^2 + 1$, а директорна раван $\alpha : z = 0$.

5.6 Одредити унију свих правих које су паралелне равни $\alpha : 2x+3y-5 = 0$ и секу праве $p : \frac{x-6}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1}$ и $q : \frac{x}{3} = \frac{y-8}{2} = \frac{z+4}{2}$.

5.7 Одредити једначину цилиндра са директрисом $x = 1+t$, $y = 2t$, $z = t^2-t^3$, чија је изводница нормална на раван $3x + 2y + x + 42 = 0$.

5.8 Одредити једначину кружног цилиндра са осом $s : \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{2}$ који садржи тачку $A(4, 2, 4)$.

5.9 Одредити једначину кружног цилиндра ако су познате три његове изводнице: $l_1 : x = y = z$, $l_2 : x - 1 = y = z$, $l_3 : x = y - 1 = z$.

5.10 Око сфере $\mid \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0} \mid = 3$, $\overrightarrow{r_0}(1, -2, -1)$ је описан цилиндар чије су генератрисе паралелне правој $x = 2t - 3$, $y = -t + 7$, $z = -2t + 5$. Одредити једначину тог цилиндра.

5.11 Одредити једначину цилиндра који је описан око две сфере $\mid \overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_0} \mid = 16$, $\overrightarrow{r_0}(1, 0, 2)$ и $\mid \overrightarrow{r} \mid = 16$.

5.12 Наћи једначину конусне површи чији је врх тачка $S(1, 1, 0)$, а директриса крива $x = t$, $y = t^2$, $z = e^t$.

5.13 Одредити једначину конуса са врхом $V(0,5,0)$ који додирује сферу $x^2+y^2+z^2=9$.

5.14 Дати су круг $k:(x-3)^2+(y-6)^2+(z+3)^2=8, x+2y-z-12=0$ и тачка $M(6,8,-2)$. Одредити једначину правог кружног конуса који садржи круг k и тачку M.

5.15 Одредити једначину конусне површи чији је врх центар круга $(x-2)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=36$, $3x+y-z=0$, а директриса ортогонална пројекција тог круга на раван Oxz.

5.16 Једначина $x^2+y^2-z^2=0$ представља кружни конус са врхом у координатном почетку чија се оса поклапа са z–осом. Пресећи тај конус са равни $z=\lambda(y+1)$ и показати да ортогонална пројекција пресека на равна Oxy може бити елипса, хипербола, парабола или тачка у зависности од реалног параметра λ.

5.17 Одредити осу кружног конуса који је задат једначином $(mx+ny+pz)^2=x^2+y^2+z^2$.

5.18 Одредити једначину конуса чије је теме тачка $M(1,1,1)$ и који је описан око елипсоида $x^2+2y^2+3z^2=1$.

5.19 Тачке $A(2,4,6)$, $B(2,20,6)$ и $C(7,10,3)$ припадају конусу Φ са врхом $V(0,0,0)$. Цилиндар Σ у пресеку са равни $z=0$ даје криву $x^2-2x+y^2=24, z=0$. Уколико се зна да постоји раван α у којој је заједнички пресек $\alpha\cap\Phi\cap\Sigma$ круг, одредити све такве равни α. Одредити једначине цилиндра Σ и конуса Φ за неки избор такве равни α.

5.20 Хипербола $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, y=0$ ротира око осе 1) Ox; 2) Oz. Одредити једначину добијене ротационе површи и испитати пресеке те површи са равнима паралелним координатним равнима.

5.21 Наћи једначине правих које припадају хиперболичком параболоиду $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=z$ и које су паралелне равни $3x+2y-4z=0$.

6 Сферна геометрија

6.1 Одредити растојање између два места на Земљи (полупречника R) која су дата са $A: 30^o$ северне ширине, 30^o источне дужине и $B: 30^o$ јужне ширине, 90^o источне дужине.

6.2 Одредити растојање између два места на Земљи (полупречника R) која су дата са $A: 45^o$ јужне ширине, 20^o источне дужине и $B: 30^o$ јужне ширине, 80^o источне дужине.