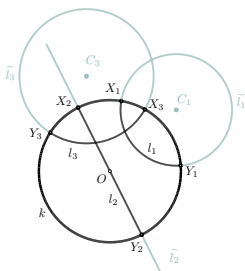


14. Поенкареов диск модел

Посматрајмо јединични круг $k : (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 = 1$ еуклидске равни \mathbb{E}^2 . У комплексним координатама он је дат једначином $|z| = 1$.

Тачке Поенкареовог диск модела, које ћемо називати **h -тачкама**, су тачке унутрашњости овог круга $\mathbb{D}^2 = \{z \mid |z| < 1\}$. Скуп свих h -тачака је **h -раван**, а сам круг називамо **апсолутом**. Специјално, тачку O дату са $z = 0$ називамо центром апсолуте.

h -праве. Нека је \tilde{T} уопштени круг равни \mathbb{E}^2 , нормалан на апсолуту k . Тада \tilde{T} и k имају две заједничке тачке X и Y .



Тада је \tilde{T} у еуклидском смислу права ако и само ако \tilde{T} садржи центар апсолуте O . Скуп тачака уопштеног круга \tilde{T} које су уједно и h -тачке је **h -права** и означаваћемо је са l . Тачке пресека апсолуте и \tilde{T} , X и Y , називамо **бесконечно далеким тачкама h -праве l** .

Ако је \tilde{T} у еуклидском смислу права, која онда садржи тачку O и ако је θ угао који \tilde{T} одређује са x_1 осом, онда је једначина \tilde{T} дата са

$$\sin \theta x_1 - \cos \theta x_2 = 0.$$

Нека је \tilde{T} у еуклидском смислу круг и нека је његов центар C дат координатом $c = a + ib$, а полупречник r . Ако је X једна заједничка тачка кругова k и \tilde{T} троугао OXC је правоугли, па је $1 + r^2 = |c|^2$. Зато је круг \tilde{T} дат једначином $|z - c| = r$, тј. $(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 = a^2 + b^2 - 1$, односно

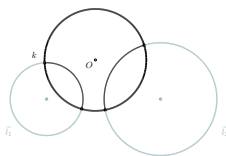
$$x_1^2 + x_2^2 - 2ax_1 - 2bx_2 + 1 = 0.$$

Уочимо да за две разне h -тачке A и B постоји тачно једна h -права l која их садржи. Тада \tilde{T} садржи и тачке $\psi_k(A)$ и $\psi_k(B)$.

Ако је \tilde{T} у еуклидском смислу круг, сматрамо да је h -тачка A **h -између** h -тачка B и C ако припада луку BC круга \tilde{T} који је подскуп унутрашњости апсолуте. Ако је \tilde{T} у еуклидском смислу права, h -тачка A **h -између** h -тачка B и C ако је и еуклидски A између B и C . Све h -тачке A које су h -између B и C је h -дуж BC .

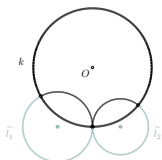
Ако уопштени круг \tilde{T} сече апсолуту у тачкама X и Y и садржи h -тачку A , онда су скупови тачака отворених лукова \widehat{AX} и \widehat{AY} који припадају h -равни, **отворене h -полуправе**.

Међусобни положај две h -праве. Два разна уопштена круга \tilde{l}_1 и \tilde{l}_2 који одређују h -праве, l_1 и l_2 могу да имају заједничке највише две тачке.

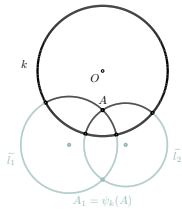


Ако немају заједничких тачака, тада се ни l_1 и l_2 не секу. Тада кажемо да су l_1 и l_2 **хиперпаралелне**.

С обзиром да се инверзијом у односу на круг k , \tilde{l}_1 и \tilde{l}_2 сликају у себе, ако је скуп заједничких тачака непразан, он се слика у себе.



Зато, ако се \tilde{l}_1 и \tilde{l}_2 додирују у једној тачки, она је инваријантна за инверзију, па припада апсолути k и није h -тачка. Тада кажемо да су l_1 и l_2 **паралелне** праве.



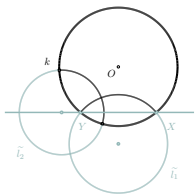
Ако се \tilde{h}_1 и \tilde{h}_2 секу у две тачке, једна припада унутрашњости, а друга спољашњости апсолуте, па се h_1 и h_2 секу у једној тачки. Тада кажемо да су оне **конкурентне**.

Угао. Мера угла између две h -праве је његова еуклидска мера, односно, угао између две h -праве h_1 и h_2 је угао између тангенти на h_1 и h_2 у пресечној тачки.

h - нормале. Нека је h_1 h -права са бесконачно далеким тачкама X и Y . Тада је уопштени круг \tilde{h}_1 нормалан на апсолуту k . Одредимо h -праву h_2 нормалну на h_1 .

Ако је \tilde{h}_1 еуклидски права, тада је \tilde{h}_2 или права ортогонална на \tilde{h}_1 у O или круг са центром C који припада правој \tilde{h}_1 . При том је његов полупречник $r = \sqrt{OC^2 - 1}$.

Нека је \tilde{h}_1 круг. Испитајмо када је уопштени круг \tilde{h}_2 ортогоналан на k и \tilde{h}_1 .



Ако је \tilde{h}_2 права, тада она садржи центре кругова \tilde{h}_1 и k . Ако је $\tilde{h}_2(C, r)$ круг, тада тачка C има исту потенцију r^2 према круговима \tilde{h}_1 и k , па тачка C припада радикалној оси XY ових кругова, а не припада дужи XY . При том важи $OC^2 = 1 + r^2$.

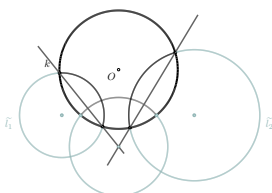
Ако круг \tilde{h}_2 садржи h -тачку A , тада, с обзиром да је ортогоналан на k садржи и тачку $\psi_k(A) = A'$.

Сада лако следи наредно тврђење.

Теорема

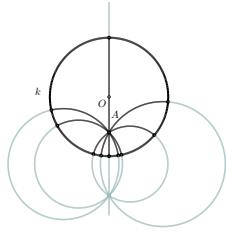
Постоји јединствена h -права n која садржи дату h -тачку A и нормална је на дату h -праву a .

Праву n називамо **h -нормалом**. Ако је A_0 заједничка тачка правих n и a , тада је A_0 **h -пројекција** h -тачке A на h -праву a . Следеће тврђење наводимо без доказа.

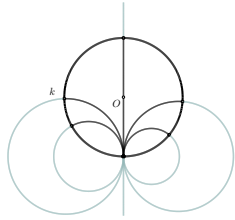


Тврђење

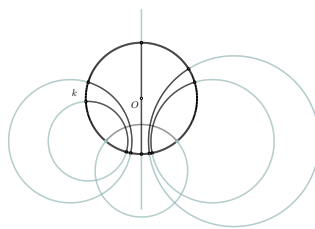
Две h -праве h_1 и h_2 су хиперпаралелне ако и само ако имају заједничку h -нормалу. При том, та нормала је јединствена.



Ако је A h -тачка, тада скуп свих h -правих које садрже A називамо **праменом конкурентних** правих или **елиптичким** праменом правих, са центром у A и означавамо \mathfrak{X}_A .



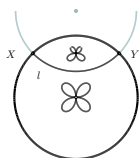
Ако је X тачка апсолуте, сви уопштени кругови који садрже X и који одређују h -праве се додирују у тачки X . Зато све h -праве које имају заједничку бесконачно далеку тачку X називамо **праменом паралелних** правих или **параболичким** праменом, са центром у X . Њега означавамо са \mathfrak{X}_X .



Ако је s h -права, тада скуп свих h -правих нормалних на s називамо **праменом хиперпаралелних** правих, односно **хиперболичким** праменом и означавамо са \mathfrak{X}_s .

Уочимо да за две разне h -праве постоји тачно један прамен \mathfrak{X} који их садржи.

h -рефлексије. Нека је l h -права. Тада је \tilde{T} уопштени круг ортогоналан на апсолуту k . Уопштена инверзија $\psi_{\tilde{T}}$ у односу на \tilde{T} тада слика круг k у себе.



При том, h -тачке h -праве l су инваријантне за ово пресликавање. h -права l разлаже унутрашњост круга k на две области које се пресликавањем $\psi_{\tilde{T}}$ сликају једна у другу.

Рестрикцију $\psi_{\tilde{T}}$ на h -раван називамо **h -рефлексијом** и означавамо са S_l .

Дефиниција

Композиција коначног броја h -рефлексија је **h -изометрија**. Уколико је h -изометрија композиција парног броја h -рефлексија онда је она **директна**, а ако је композиција непарног броја h -рефлексија **индиректна** h -изометрија.

Следеће тврђење следи директно.

Тврђење

Скуп свих h -изометрија је група.

Због особина уопштених инверзија важи и следеће тврђење.

Тврђење

Свака h -изометрија слика h -колинеарне тачке у h -колинеарне тачке и чува распоред. Слика h -праве у h -праве. При том, углови између две h -праве и њихових слика су једнаки. Конкурентне, паралелне, односно хиперпаралелне h -праве се сликају редом у конкурентне, паралелне, односно хиперпаралелне h -праве.

Нека је h -права l дата једначином $\sin \theta x_1 - \cos \theta x_2 = 0$. Нађимо формуле h -рефлексије у односу на њу.

С обзиром да је \tilde{T} (еуклидски) права која садржи тачку O тражене формуле су формуле еуклидске рефлексије у односу на праву \tilde{T} односно формула h -рефлексије је

$$S_l(z) = e^{2i\theta} \bar{z}. \quad (1)$$

Ако је h -права l дата једначином

$$x_1^2 + x_2^2 - 2ax_1 - 2bx_2 + 1 = 0,$$

односно одређена еуклидским кругом са центром у $c = a + ib$ и полупречником $r^2 = |c|^2 - 1$ онда су формуле инверзије ψ_l , а

самим тим и S_l дате са $z \mapsto \frac{r^2}{\bar{z}-\bar{c}} + c = \frac{r^2 + \bar{z}c - |c|^2}{\bar{z}-\bar{c}} = \frac{c\bar{z}-1}{\bar{z}-\bar{c}}$, односно

$$S_l(z) = \frac{c\bar{z}-1}{\bar{z}-\bar{c}}. \quad (2)$$

Примедба Уочимо да су (1) и (2) антихомографије, које при том сликају \mathbb{D}^2 у \mathbb{D}^2 . При том, оба се могу записати и као $z \mapsto \frac{a\bar{z}+b}{b\bar{z}+a}$, где је у првом случају $a = e^{i\theta}$, $b = 0$, а у другом $a = ic$, $b = -i$.

С обзиром да су композиције антихомографија инверзивна пресликавања, видимо да су све h -изометрије инверзивна пресликавања која сликају \mathbb{D}^2 у себе.

Са друге стране, може се показати да су хомографије којима се \mathbb{D}^2 слика у себе дате са $m : z \mapsto \frac{az+b}{bz+a}$ где $|b| < |a|$.

Симетрија $S_p : z \mapsto \bar{z}$ је једна антихомографија која слика \mathbb{D}^2 у себе. Ако је \mathcal{I} било која друга антихомографија за коју је скуп \mathbb{D}^2 инваријантан $\mathcal{I} \circ S_p$ је хомографија која слика \mathbb{D}^2 у себе, односно облика (3).

Дакле, инверзивна пресликавања које сликају \mathbb{D}^2 у себе су m и $m \circ S_p$ где је

$$m(z) = \frac{az + b}{bz + \bar{a}}, |b| < |a|, \quad (3)$$

$$S_p(z) = \bar{z}.$$

Може се показати да важи да важи следеће тврђење. Те:
Директне h -изометрије су дате са $m(z) = \frac{az+b}{bz+\bar{a}}$, где $a, b \in \mathbb{C}$ и $|b| < |a|$, а индиректне $z \mapsto m(\bar{z})$.

Дакле, група h -изометрија хиперболичке равније подгрупа групе инверзивних трансформација. При том, може се показати да се h -изометрија може представити као композиција две h -рефлексије, а свака индиректна је композиција до три h -рефлексије.

Тврђење

Нека је A h -тачка различита од центра апсолуте O . Тада постоји јединствена h -рефлексија S_I која слика A у O .

Доказ. Нека је l h -права која не садржи тачку O , одређена кругом \tilde{T} са центром у C и координатом $c = a + ib$. Тада је $S_I(O) = \frac{1}{\bar{c}}$, видети (2). Ако је $A \neq O$ h -тачка и w њена комплексна координата, следи да је $c = \frac{1}{\bar{w}}$, центар еуклидског круга \tilde{T} који одређује h -праву l такву да је $S_I(A) = O$. \square

Дефиниција

h -права l такву да се h -рефлексијом S_l тачка A слика у B је h -симетрала дужи AB .

Дакле, ако је једна од тачака A и B центар апсолуте показали смо да постоји јединствена h -симетрала те дужи. Ако је S_q рефлексија којом се A слика у O а B у B_1 и l_1 h -симетрала дужи OB_1 , тада је h -права $S_q(l)$ симетрала дужи AB . Зато важи следеће тврђење.

Тврђење

Нека су A и B две разне h -тачке. Тада постоји јединствена h -симетрала дужи AB .

Ако је w комплексна координата тачке $A \neq O$ тада је формула h -рефлексије којом се A слика у O дата са $S_I(z) = \frac{\frac{1}{\bar{w}}\bar{z}-1}{\bar{z}-\frac{1}{\bar{w}}} =$

$\frac{\frac{1}{\bar{w}}\bar{z}-1}{\bar{z}-\frac{1}{\bar{w}}}$ односно

$$S_I(z) = \frac{w}{\bar{w}} \frac{\bar{z} - \bar{w}}{w\bar{z} - 1}. \quad (4)$$