6. Афине трансформације у $R^n = 1,2$

Афина трансформација праве дата је једначином
$x' = ax + b, a \neq 0$.

Теорема

Нека су A, B и A_1, B_1 два пара разних тачака једне праве. Тада постоји јединствена афина трансормација σ те праве таква да је $\sigma(A) = A_1$, $\sigma(B) = B_1$.

Претпоставимо прво да је $a = 1$. Тада је трансформација изометрија и то **коинциденција** ε за $b = 0$, односно **транслација** τ_b за $b \neq 0$.
Нека је сада $a \neq 1$. Тада трансформација има тачно једну инваријантну тачку S. При том она има координату $S = \frac{b}{1-a}$.
Зато је трансформација дата са

$$x' = ax + (1-a)S$$

и у питању је хомотетија $H_{S,a}$.

При том, уочимо да је хомотетија $H_{S,a}$ праве уједно и дилатација праве са основом S и коефицијентом a, паралелно вектору праве.
Афине трансформације праве

афина трансформација	инв. тачке	сопст. вредн.
ε	све	1
τ_v	$\emptyset$	1
$\mathcal{H}_{S,a} = \mathcal{D}_{S,a}$	S	$a \neq 1$

Сетимо се и да је $\tau_{2\overrightarrow{AB}} = S_B \circ S_A$, где је $S_A = \mathcal{H}_{S,-1} = \mathcal{D}_{S,-1}$ централна рефлексија. Зато директно важи следеће тврђење.

Тврђење

Свака афина трансформација праве може се представити као композиција не више од две дилатације од којих највише једна није и рефлексија.

Нека је дата афина трансформација равни $\sigma : X' = AX + B$, где је A квадратна матрица.
Важи следеће тврђење, слично као код изометрија.

Тврђење

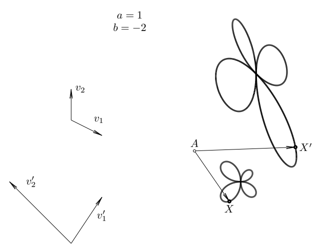
Нека су A, B, C и A_1, B_1, C_1 две тројке неколинеарних тачака једне равни. Тада постоји јединствена афина трансформација σ те равни таква да је $\sigma(A) = A_1$, $\sigma(B) = B_1$, $\sigma(C) = C_1$.

Нека су λ_1 и λ_2 сопствене вредности матрице A. Оне могу бити или обе реалне или конјуговано комплексне.

---

1. Претпоставимо да су $\lambda_{1,2} = a + \imath b$ конјуговано комплексни бројеви, $b \neq 0$. Тада $\lambda = 1$ није сопствена вредност и трансформација има тачно једну инваријантну тачку S. При том, ако је $A(v_1 + \imath v_2) = (a + \imath b)(v_1 + \imath v_2)$, а самим тим и $A(v_1 - \imath v_2) = (a - \imath b)(v_1 - \imath v_2)$, важи да је

$$Av_1 = av_1 - bv_2,$$
$$Av_2 = bv_1 + av_2.$$



Како су конјуговано комплексни сопствени вектори за вредности λ_1 и λ_2 независни, линеарно су независни и v_1, v_2.

У бази (v_1, v_2) матрица пресликавања дата са

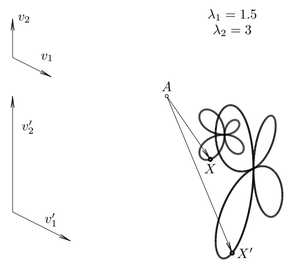
$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}.$$

Ово пресликавање је **уопштена ротација** $\mathcal{R}_S$.
Ако су вектори v_1 и v_2 ортогонални и јединични, уопштена ротација је композиција хомотетије $H_{S,\sqrt{a^2+b^2}}$ и еуклидске ротације око тачке S.
Надаље, нека су $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Тада постоји база равни састављена од сопствених вектора у којој је матрица пресликавања дата са

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

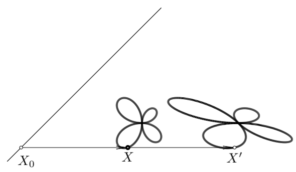
2.

Уколико $\lambda_1, \lambda_2 \neq 1$ афина трансформација има тачно једну инваријантну тачку S. Ову трансформацију називамо **уопштеном хомотетијом** и означавамо $\mathcal{H}_{S,\lambda_1,\lambda_2}$.

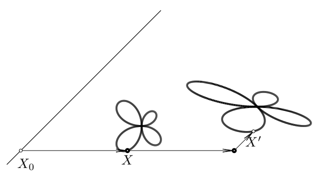


Нека је $\lambda_1 = 1$.

3а. Ако трансформација има бар једну инваријантну тачку S и ако су v_1, v_2 сопствени вектори за $\lambda_1 = 1$ и λ_2, све тачке праве $p = S + \mathcal{L}\{v_1\}$ су инваријантне, а афина трансформација је **дилатација** $\mathcal{D}_{p,v_2,\lambda_2}$ са основом p, паралелно вектору v_2 са коефицијентом λ_2.



3б. Ако трансформација нема инваријантних тачака, онда постоји вектор v колинеаран вектору v_1 и дилатација $\mathcal{D}_{p,v_2,\lambda_2}$, где је p права паралелна вектору v_1 такви да је $\sigma = \tau_v \circ \mathcal{D}_{p,v_2,\lambda_2}$. Трансформацију можемо назвати **клизајућом дилатацијом**.



4.

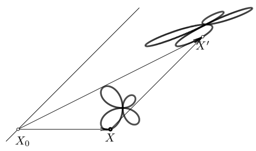
Претпоставимо сада да је $\lambda_1 = \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Тада постоји база у којој је матрица пресликавања дата са

$$A_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \text{ или } A_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

Нека је матрица дата са A_1.
4а. Тада, ако је $\lambda_1 \neq 1$ трансформација има тачно једну инваријантну тачку S и при том се произвољни вектор v слика у $\lambda_1 v$. Зато је трансформација **хомотетија** $\mathcal{H}_{S,\lambda_1}$.
4б и в. Ако је $\lambda_1 = 1$ трансформација је или **коинциденција** ε када има бар једну инваријантну тачку или **транслација** τ_v када их нема.

Нека је коначно матрица трансформације дата са A_2.
4г. Ако је $\lambda_1 \neq 1$ афина трансформација има тачно једну инваријантну тачку S. Нека је v_1 сопствени вектор за λ_1. Ако је $\mathcal{H}_{S,\lambda_1}$ хомотетија са центром у S, а $\mathcal{T}_{p,v_1}$ трансвекција, где је $p = S + \mathcal{L}\{v_1\}$, тада директно добијамо да је $\sigma = \mathcal{H}_{S,\lambda_1} \circ \mathcal{T}_{p,v_1}$.

4д. Ако је $\lambda_1 = 1$ и постоји бар једна инваријантна тачка трансформације, онда је трансформација **трансвекција** $\mathcal{T}_{p,v_1}$ где је v_1 сопствени вектор за λ_1 и $p = S + \mathcal{L}\{v_1\}$.



4ђ. Ако је $\lambda_1 = 1$ и σ нема инваријантних тачака, тада је $\sigma = \tau_v \circ \mathcal{T}_{p,v_1}$, где је v произвољни вектор.

Може се показати и да важи следећа теорема, у аналогији са одговарајућом теоремом о изометријама равни.

Теорема

Свака афина трансформација равни може се представити као композиција не више од три дилатације равни, међу којима највише једна није и афина рефлексија.

Афине трансформације равни

аф. тран.	инв. тачке	сопс. вредности	база од сопс. вект.
ε	све	$\lambda_{1,2} = 1$	ДА
τ_v	$\emptyset$	$\lambda_{1,2} = 1$	ДА
$\mathcal{T}_{p,v_1}$	$P \in p$	$\lambda_{1,2} = 1$	НЕ
$\tau_v \circ \mathcal{T}_{p,v_1}$	$\emptyset$	$\lambda_{1,2} = 1$	НЕ
$\mathcal{D}_{p,v_2,\lambda_2}$	$P \in p$	$\lambda_1 = 1, \lambda_2 \neq 1$	ДА
$\tau_v \circ \mathcal{D}_{p,v_2,\lambda_2}$	$\emptyset$	$\lambda_1 = 1, \lambda_2 \neq 1$	ДА
$\mathcal{H}_{S,\lambda_1,\lambda_2}$	S	$\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2 \neq 1$	ДА
$\mathcal{H}_{S,\lambda_1}$	S	$\lambda_1 = \lambda_2 \neq 1$	ДА
$\mathcal{H}_{S,\lambda_1} \circ \mathcal{T}_{p,v_1}$	S (важи $S \in p$)	$\lambda_1 = \lambda_2 \neq 1$	НЕ
$\mathcal{R}_S$	S	$\lambda_{1,2} = a \pm \imath b$	НЕ