

### 3. Класификације изометрија у $R^n = 1, 2$

**Изометрије еуклидске праве.** Формуле једне изометрије праве  $\mathcal{I}$  гласе

$$x' = ax + b. \quad (1)$$

При том је  $A = [a]$ , где је  $a \in \{-1, 1\}$ .

#### Теорема

Нека су  $A$  и  $B$ , односно  $A_1$  и  $B_1$ , два пара различитих тачака еуклидске праве  $\mathbb{R}$  и нека је  $AB = A_1B_1$ . Тада постоји јединствена изометрија  $\mathcal{I}$  праве  $\mathbb{R}$  таква да је  $\mathcal{I}(A) = A_1, \mathcal{I}(B) = B_1$ .

**Доказ.** Нека је  $x' = ax + b$  једначина трансформације  $\mathcal{I}$ . Тада су  $a$  и  $b$  решења система

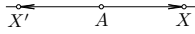
$$\begin{aligned} ax(A) + b &= x(A_1), \\ ax(B) + b &= x(B_1). \end{aligned}$$

При том је детерминанта система једнака  $(x(A) - x(B)) \neq 0$ , те постоји јединствено решење по  $a, b$ . Даље како је  $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{A_1B_1}\|$  одузимањем ових једначина следи да је  $a \in \{-1, 1\}$  односно да је  $\mathcal{I}$  изометрија.  $\square$

**Примедба** У претходном доказу смо видели да је линеарно пресликавање праве на јединствен начин одређено сликама произвољне две тачке  $A$  и  $B$  те праве. Уколико су још дужи  $AB$  и њена слика једнаке, пресликавање је изометрија.

Посматрајмо једначину (1).

1. Ако је  $a = -1$ ,  $\lambda = 1$  није сопствена вредност матрице  $A$  па  $\mathcal{I}$  има тачно једну инваријантну тачку  $A$ , а за јединични вектор  $v$  важи  $\overline{\mathcal{I}}(v) = -v$ .

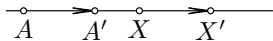


Зато се произвољна тачка праве  $X$  слика у тачку  $X'$  такву да је  $\overrightarrow{XA} = -\overrightarrow{X'A}$ , те је  $A$  средиште дужи  $XX'$ . Ову трансформацију називамо **централном рефлексijом праве** и означавамо  $S_A$ . Централна рефлексija је индиректна трансформација.

2а. Нека је сада  $a = 1$ . У овом случају ради се о директној изометрији.

Тада важи  $\overline{\mathcal{I}}(v) = v$ . Ако  $\mathcal{I}$  има бар једну инваријантну тачку  $A$ , тада за произвољну тачку  $X$  праве и њену слику  $X'$  важи да је  $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AX'}$ , па је и  $X' = X$ , односно  $\mathcal{I} = \varepsilon$ .

2б. Ако  $\mathcal{I}$  нема инваријантних тачака, тада је  $\mathcal{I} = \tau_v \circ \mathcal{J}$ , где изометрија  $\mathcal{J}$  има исти коефицијент  $a = 1$  и бар једну инваријантну тачку, па је коинциденција. Изометрија  $\mathcal{I}$  је тада композиција транслагације и коинциденције, односно транслагација  $\tau_v$ . При том, уочимо да је за  $v = \vec{0}$ ,  $\tau_v = \varepsilon$ , па коинциденцију можемо сматрати транслагацијом за вектор  $\vec{0}$ .



## Изометрије праве

| изометрија    | инв. тачке | директност |
|---------------|------------|------------|
| $\varepsilon$ | све        | +          |
| $\tau_v$      | $0$        | +          |
| $S_A$         | $1$        | -          |

## Тврђење

- а) Композиција две централне рефлексije праве је транслагација или коинциденција, односно важи  $S_B \circ S_A = \tau_{\vec{2AB}}$ .
- б) Композиција две транслагације праве је транслагација или коинциденција, односно важи  $\tau_v \circ \tau_u = \tau_{u+v}$ .
- в) Композиција транслагације праве и централне рефлексije је централна рефлексija праве.

**Доказ.** а) Композиција две индиректне трансформације, централне рефлексије праве, је директна трансформација, дата је формулом  $x' = x + b$ , те је транслација  $\tau_b$  (специјално сматрамо да је  $\varepsilon = \tau_0$ ). Вектор транслације је једнак  $\overrightarrow{AA'}$ , где је  $A' = \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A(A)$  слика тачке  $A$ , па важи  $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AB}$ .

б) Композиција две директне изометрије је директна, па је у питању транслација. Како постоје тачке  $A, B, C$  такве да је  $v = \overrightarrow{AB}, u = \overrightarrow{BC}$  и при том важи да је  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$  тврђење директно важи.

в) Композиција директне и индиректне изометријске трансформације праве је индиректна трансформација, тј. централна рефлексија. Зато је  $\tau_v \circ \mathcal{S}_A = \mathcal{S}_B$ . При том, како је  $\mathcal{S}_A^{-1} = \mathcal{S}_A$  следи да је  $\tau_v = \mathcal{S}_B \circ \mathcal{S}_A = \tau_{2\overrightarrow{AB}}$ , па је тачка  $B$  таква да је  $\overrightarrow{AB} = v/2$ . □

Следеће тврђење директно следи.

#### Теорема

Произвољна изометрија  $\mathcal{I}$  еуклидске праве  $\mathbb{R}$  може се представити као композиција до две централне рефлексије.

Нека је изометрија равни  $\mathcal{I}$  дата формулама  $X' = AX + B$ .

#### Теорема

Нека су  $A, B, C$  односно  $A_1, B_1, C_1$ , два тројке неколинеарних тачака еуклидске равни  $\mathbb{R}^2$  и нека је  $AB = A_1B_1, AC = A_1C_1, BC = B_1C_1$ . Тада постоји јединствена изометрија  $\mathcal{I}$  равни  $\mathbb{R}^2$  таква да је  $\mathcal{I}(A) = A_1, \mathcal{I}(B) = B_1, \mathcal{I}(C) = C_1$ .

**Доказ.** Тражимо трансформацију  $\mathcal{I} : X' = AX + B$ . Нека су координате квадратне матрице  $A$  дате са  $a_{ij}, i, j = 1, 2$ , а координате колоне  $B$  са  $b_1, b_2$ .

Тада се услов да  $\mathcal{I}$  слика  $A, B, C$  у  $A_1, B_1, C_1$  своди на два система једначина по  $a_{i1}, a_{i2}, b_i, i = 1, 2$

$$\begin{aligned} a_{i1}x_1(A) + a_{i2}x_2(A) + b_i &= x'_i(A), \\ a_{i1}x_1(B) + a_{i2}x_2(B) + b_i &= x'_i(B), \\ a_{i1}x_1(C) + a_{i2}x_2(C) + b_i &= x'_i(C), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Детерминанте оба система су исте и једнаке

$$\det \begin{bmatrix} x_1(B) - x_1(A) & x_2(B) - x_2(A) \\ x_1(C) - x_1(A) & x_2(C) - x_2(A) \end{bmatrix}.$$

Како су вектори  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  неколинеарни и дати са  $(x_1(B) - x_1(A), x_2(B) - x_2(A))$  и  $(x_1(C) - x_1(A), x_2(C) - x_2(A))$ , детерминанта је различита од нуле, па постоји јединствена матрица  $A$  и колона  $B$  које испуњавају овај услов.

При том, како је,  $\|\vec{AB}\| = \|\vec{A_1B_1}\|$ ,  $\|\vec{AC}\| = \|\vec{A_1C_1}\|$  и  $\|\vec{BC}\| = \|\vec{B_1C_1}\|$  следи и да је  $\vec{AB} \circ \vec{AC}$ .

Тада је

$$\bar{\mathcal{I}}\left(\frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}\right) = \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|},$$

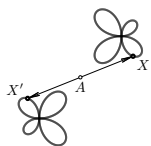
$$\bar{\mathcal{I}}\left(\vec{AC} - \left(\vec{AC} \circ \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}\right) \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}\right) = \left(\vec{A_1C_1} - \left(\vec{A_1C_1} \circ \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}\right) \frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}\right),$$

па  $\bar{\mathcal{I}}$  слика ортонормирану базу равни која се добија Грам-Шмитовим поступком од  $\{\vec{AB}, \vec{AC}\}$  у ортонормирану базу која се добија од  $\{\vec{A_1B_1}, \vec{A_1C_1}\}$ . Зато је матрица пресликавања  $A$  ортонормирана, па је  $\mathcal{I}$  изометрија.  $\square$

*Из доказа претходне теореме следи да је линеарна трансформација равни одређена на јединствен начин сликама три неколинеарне тачке  $A, B, C$ , а у питању је изометрија ако и само се дужи  $AB, BC$  и  $CA$  сликају у себи једнаке дужи.*

Нека је  $\mathcal{I}$  изометријска трансформација  $\mathbb{R}^2$ . Матрица  $A$  је квадратна, па може имати или две реалне сопствене вредности или две конјуговано комплексне.

**1.** Претпоставимо, прво да је  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ . Тада  $\mathcal{I}$  има тачно једну инваријантну тачку  $A$ .



Сваки вектор одговарајућег векторског простора је сопствени за сопствену вредност  $\lambda = -1$ . Зато, ако се произвољна тачка  $X$  слика у  $X'$  важи да је  $\vec{AX} = -\vec{AX}'$ , те је  $A$  средиште дужи  $XX'$ .

Ову трансформацију називамо **централном симетријом равни** и означавамо  $S_A$ . Како је димензија сопственог потпростора за  $\lambda = -1$  дводимензион, централна симетрија равни је директна трансформација.

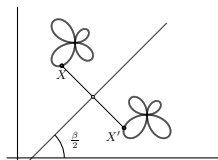
**2.** Ако је  $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$  онда, слично као у случају еуклидске праве, у питању је директна трансформација.

**2а. коинциденција равни**  $\varepsilon$  уколико постоји бар једна инваријантна тачка

**2б. транслација**  $\tau_v$  уколико инваријантних тачака нема.

3. Нека је сада  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = -1$ . Тада је у питању индиректна трансформација и матрица пресликавања је облика  $S_\beta$ . Уочимо да је јединични сопствени вектор за  $\lambda_1 = 1$  дат са  $v_1 = (\cos \frac{\beta}{2}, \sin \frac{\beta}{2})$ , односно да одређује оријентисани угао  $\frac{\beta}{2}$  са  $x_1$ -осом.

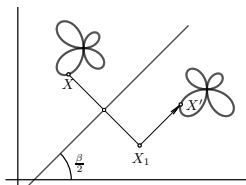
3а. Ако изометријска трансформација има бар једну инваријантну тачку  $A$  онда су инваријантне и све тачке праве  $p$  која садржи тачку  $A$  и одређена је вектором  $v_1$ , односно одређује угао  $\frac{\beta}{2}$  са  $x_1$ -осом.



Нека је  $X$  произвољна тачка равни која не припада  $p$  и  $X_0 \in p$ , таква да су праве  $XX_0$  и  $p$  ортогоналне. С обзиром да су сопствени вектори за разне сопствене вредности међу собно ортогонални, следи да је вектор  $\overrightarrow{XX_0}$  сопствени за  $\lambda_2 = -1$ .

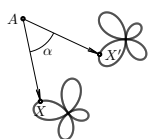
При том,  $\mathcal{I}(X_0) = X_0$ , па ако је  $\mathcal{I}(X) = X'$ , важи да је  $\overrightarrow{XX_0} = -\overrightarrow{X'X_0}$ , односно тачка  $X_0$  је средиште дужи  $XX'$ . Ову трансформацију називамо **осном рефлексijом равни** у односу на праву  $p$  и означавамо  $S_p$ .

3б.



Ако трансформација нема инваријантних тачака тада је  $\mathcal{I} = \tau_v \circ S_p$ , где је  $v$  вектор паралелан правој  $p$ , а трансформацију називамо **клизајућом рефлексijом равни** и означавамо  $\mathcal{G}_{p,v}$ .

4. Ако су  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  конјуговано комплексне сопствене вредности, изометрија  $\mathcal{I}$  има тачно једну инваријантну тачку  $A$ .



При том, матрица пресликавања је облика  $R_{-\alpha}$ , за неко  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Ако се произвољна тачка  $X$  равни слика у  $X'$ , важи  $\overline{\mathcal{I}(\overrightarrow{AX})} = \overrightarrow{AX'}$ , те је оријентисани угао између  $\overrightarrow{AX}$  и  $\overrightarrow{AX'}$  једнак  $\alpha$ . Ову трансформацију називамо **централном ротацијом равни** око тачке  $A$  за угао  $\alpha$  и означавамо  $\mathcal{R}_{A,\alpha}$ . Уочимо да је  $S_A = \mathcal{R}_{A,\pi}$ .

## Изометрије равни

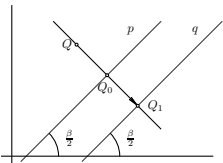
| изометрија                  | инв. тачке  | сопс. вредности                   | директност |
|-----------------------------|-------------|-----------------------------------|------------|
| $\varepsilon$               | све         | $\lambda_{1,2} = 1$               | +          |
| $\tau_v$                    | 0           | $\lambda_{1,2} = 1$               | +          |
| $S_p$                       | $P \in p$   | $\lambda_{1,2} = \pm 1$           | -          |
| $\mathcal{G}_{p,v}$         | $\emptyset$ | $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$   | -          |
| $\mathcal{R}_{A,\alpha}$    | $A$         | $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\alpha}$ | +          |
| $S_A = \mathcal{R}_{A,\pi}$ | $A$         | $\lambda_{1,2} = -1$              | +          |

### Теорема

Произвољна изометрија  $\mathcal{I}$  еуклидске равни  $\mathbb{R}^2$  може се представити као композиција до три осне рефлексije.

**Доказ.** Ако је  $\mathcal{I} = \varepsilon$  тада за произвољну праву  $p$  равни  $\mathbb{R}^2$  важи  $\varepsilon = S_p^2$ .

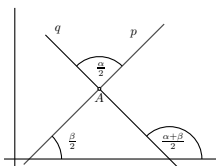
Нека је  $\mathcal{I} = \tau_v$  транслација. Нека је, даље,  $p$  произвољна права равни  $\mathbb{R}^2$  ортогонална на правац вектора  $v$ ,  $Q_0 \in p$ ,  $Q_1$  таква да је  $\overrightarrow{Q_0 Q_1} = \frac{v}{2}$  и  $Q = S_p(Q_1)$ .



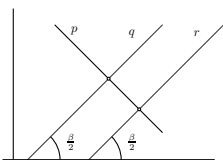
Тада је  $\overrightarrow{Q Q_1} = v$ . Посматрајмо трансформацију  $\tau_v \circ S_p$ . Ако је матрица рефлексije  $S_p$  дата са  $S_\beta$ , онда је она уједно и матрица пресликавања  $\tau_v \circ S_p$ . При том  $\tau_v \circ S_p(Q_1) = \tau_v(Q) = Q_1$ , па ова трансформација има и бар једну инваријантну тачку  $Q_1$ .

Зато је  $\tau_v \circ S_p = S_q$  осна рефлексija, где  $Q_1 \in q$ . При том праве  $p$  и  $q$  одређују са осом  $x_1$  исти оријентисани угао  $\frac{\beta}{2}$  те су паралелне. Сада важи  $\tau_v = S_q \circ S_p$ .

Нека је  $\mathcal{I} = \mathcal{R}_{A,\alpha}$  ротација. Нека је даље  $p$  произвољна права равни  $\mathbb{R}^2$  таква да  $A \in p$ . Матрице изометрија  $\mathcal{R}_{A,\alpha}$  и  $S_p$  су редом,  $R_{-\alpha}$  и  $S_\beta$ . Зато је матрица композиције  $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ S_p$  дата са  $S_{\beta+\alpha}$ .



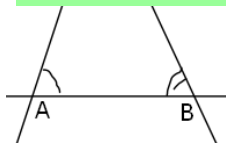
Важи и да је  $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ S_p(A) = A$ , па ова композиција има и бар једну инваријантну тачку. Зато је  $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ S_p = S_q$  осна рефлексija, где  $A \in q$ . При том, оријентисани угао између  $x_1$ -осе и праве  $q$  је  $\frac{\beta+\alpha}{2}$ . Зато је  $\mathcal{R}_{A,\alpha} = S_q \circ S_p$ , где је оријентисани угао између  $p$  и  $q$  једнак  $\frac{\alpha}{2}$ .



Нека је  $\mathcal{I} = \mathcal{G}_{p,v} = \tau_v \circ S_p$  и нека су  $q$  и  $r$  две праве ортогоналне на  $p$  такве да је  $\tau_v = S_r \circ S_q$ . Тада је  $\mathcal{G}_{p,v} = S_r \circ S_q \circ S_p$ .

□

**Пример** Нека су  $\mathcal{R}_{A,\alpha}$  и  $\mathcal{R}_{B,\beta}$  две ротације равни и нека је  $p$  права која садржи тачке  $A$  и  $B$ . Ако је  $A \neq B$  таква права је јединствена. Нека су даље  $q$  и  $r$  праве такве да је  $A \in q$ ,  $B \in r$  и нека су оријентисани углови између  $p$  и  $q$ , односно  $r$  и  $p$ , редом једнаки  $\frac{\alpha}{2}$  и  $\frac{\beta}{2}$ . Тада је  $\mathcal{R}_{A,\alpha} = S_q \circ S_p$ ,  $\mathcal{R}_{B,\beta} = S_p \circ S_r$ , па је  $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} = S_q \circ S_r$ .



Ако збир углова  $\frac{\alpha}{2}$  и  $\frac{\beta}{2}$  није једнак опруженом углу, праве  $q$  и  $r$  су две разне праве које се секу у некој тачки  $C$  (ако је  $A = B$  онда је и  $C = A$ ) и при том је оријентисани угао између  $r$  и  $q$  једнак  $\frac{\alpha+\beta}{2}$ . Тада је  $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} = \mathcal{R}_{C,\alpha+\beta}$ .

Ако је  $\frac{\alpha+\beta}{2}$  једнак опруженом углу тада су праве  $q$  и  $r$  паралелне. При том, ако је  $A = B$  оне се поклапају и  $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} = \epsilon$ , а ако је  $A \neq B$  оне су дисјунктне и  $\mathcal{R}_{A,\alpha} \circ \mathcal{R}_{B,\beta} = \tau_v$  је translација.