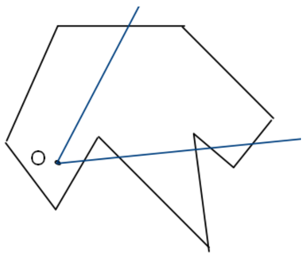
6. Полигонска површ

У овој лекцији посматрамо прост и раван полигон p.

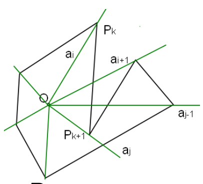


Циљ је да уочимо да такав полигон разлаже раван на две области, од којих ћемо једну назвати унутрашњошћу а другу спољашњошћу. Рећи ћемо да тачка X припада унутрашњости ако произвољна полуправа са теменом X сече полигон у непарном броју тачака.

Теорема

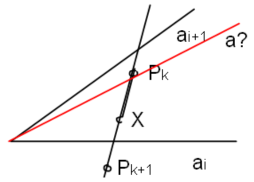
Нека су a и b две полуправе равни π полигона p, са заједничким теменом $O \notin p$, које при том не садрже ни једно теме полигона p. Тада су бројеви $k(a)$ и $k(b)$ пресечних тачака тих полуправих са p, исте парности.

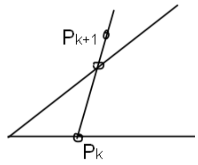
Доказ.



Полуправих са теменом O које садрже темена полигона p има коначно много. Оне разлажу раван π на углове $\angle a_1a_2, \angle a_2a_3, \ldots, \angle a_na_1$ (*). Ако је P_kP_{k+1} ивица полигона, $P_k \in a_i$, $P_{k+1} \in a_j$, тада P_kP_{k+1} припада конвексном углу $\angle a_ia_j$. Ако су $a_{i+1}, \ldots, a_{j-1}$ полуправе које припадају том конвексном углу, онда су и $a_ia_{i+1}, \ldots, a_{j-1}a_j$ конвексни, а при том P_kP_{k+1} има заједничке тачке само са њима.

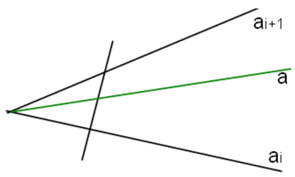
Зато само конвексни углови садрже тачке ивица полигона.





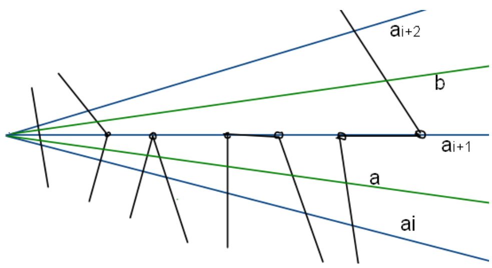
Ако нека унутрашња тачка X ивице P_kP_{k+1} припада углу (конвексном) $\angle a_ia_{i+1}$ онда та ивица сече обе полуправе a_i, a_{i+1}, где може и теме ивице да припада краку.
Заиста, ако тако не би било, нпр. не сече полуправу a_i тада су тачка X и једно теме P_k у истој области повезаности у односу на угаону линију a_ia_{i+1} (повезани су једном дужи која не сече угаону линију). Зато би и теме P_k припадало том углу, а онда би постојала и полуправа a_l, $P_k \in a_l$ која припада том углу, те (*) не би било разлагање равни.

Полуправе a и b припадају неким од ових углова. Сад можемо размотрити три различита случаја.
a и b припадају истом углу a_ia_{i+1}.



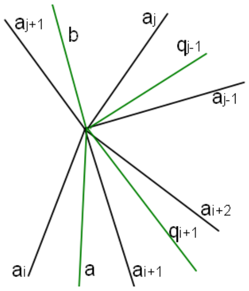
Ако a сече неку ивицу, та ивица сече краке a_i, a_{i+1} те добијамо отворену дуж чија темена припадају крацима конвексног угла. Тада b сече ту дуж, јер припада датом углу. Дакле a и b секу исте ивице полигона. $k(a) = k(b)$.

a и b припадају суседним угловима a_ia_{i+1} и $a_{i+1}a_{i+2}$. Ако a сече неку ивицу полигона, та ивица има унутрашње тачке у a_ia_{i+1} и стога сече полуправе a_i и a_{i+1}.
Тада се остварује једна од 5 могућности са слике:



Дакле, бројеви пресека $k(a)$ и $k(b)$ се разликују за паран број.

a и b припадају несуседним угловима $a_i a_{i+1}$ и $a_j a_{j+1}$.



Нека су $a_{i+1}a_{i+2}$,...,$a_{j-1}a_j$ углови из разлагања (*). Нека су q_{i+1}, q_{i+2},..., q_{j-1} полуправе које им редом припадају. Тада је $k(a) \equiv k(q_{i+1})$ $\equiv k(q_{i+2}) ... \equiv k(q_{j-1}) \equiv k(b)$. $\square$

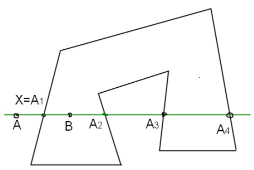
Дефиниција

Уколико полуправа са теменом $O \notin p$, која не садржи темена полигона p, има са p непарно много тачака, онда је O **унутар** p, а иначе је **изван** p. Скуп сви тачака унутар p је **унутрашњост**, а свих тачака изван p је **спољашњост** p.

Теорема

Унутрашњост и спољашњост полигона p су непразни скупови.

Доказ.



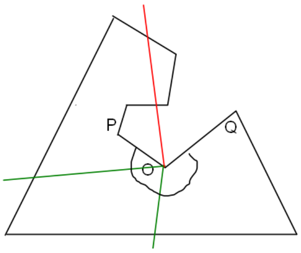
Нека је X тачка полигона p која није његово теме. Нека је l, $X \in l$ права која не садржи ни једно теме полигона p. Права l сече p у коначно много тачака. Ако постоје бар три пресечне тачке онда се тај скуп може линеарно уредити, тј. важи $\mathcal{B}(A_1, \ldots, A_n)$. Ако је $X = A_i \neq A_1$, A_n онда постоје тачке A и B такве да је $\mathcal{B}(A_{i-1}, A, X, B, A_{i+1})$. Ако је $X = A_1$ онда постоје тачке A и B т.д. $\mathcal{B}(A, X, B, A_2)$. Дакле, број пресечних тачака полуправих праве l са теменима A, односно B које садрже A_{i+1} се разликују за један, па је један од њих паран, а други непаран. Зато једна од тачка A, B припада унутрашњости, а друга спољашњости. Слично се показује за $X = A_n$ или за $n \leq 2$. $\square$

Може се показати:
- ако постоји полигонска линија која повезује две тачке и не сече полигон p, онда су те две тачке или обе унутар или обе изван p. Дакле, тачка из унутрашњости и тачка из спољашњости нису у истој класи еквиваленције повезивости парова тачака;
-и унутрашњост и спољашњост полигона p су повезани ликови. Дакле, "цела" унутрашњост припада једној класи еквиваленције, исто то важи и за спољашњост.
Закључак је да је релација повезивости парова тачака релација еквиваленције са две класе: унутрашњошћу и спољашњошћу.

Дефиниција

Унутрашњост простог, равног полигона p је **отворена полигонска површ**, означавамо је (p), а p је њен **руб**. Унија отворене полигонске површи и њеног руба је **затворена полигонска површ**, $[p]$.

Нека су P, O, Q три узастопна темена полигонске површи. Угаона линија $\angle POQ$ разлаже раван полигона на два отворена угла α и α'. Може се показати: ако једна отворена полуправа са теменом O која припада углу α и не садржи ни једно теме полигона има са полигоном непарно много заједничких тачака, онда то важи за сваку такву полуправу угла α.



Тада је тај угао α **унутрашњи** угао полигонске површи, а уколико је конвексан, њему напоредни угао је **спољашњи** угао.

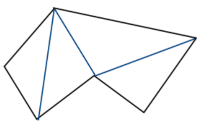
Дефиниција

Дијагонала је дуж чија су темена несуседна темена полигона. Дијагонала полигонске површи (p) чије су све тачке унутар p је **унутрашња**.

Свака полигонска површ са бар четири темена има бар једну унутрашњу дијагоналу.

Дефиниција

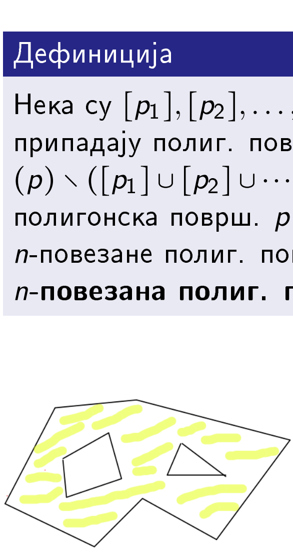
Разлагање неког лика на троугаоне површи је **триангулација** тог лика.



Постоји триангулација произвољне полигонске површи (са бар четири темена) њеним унутрашњим дијагоналама.

Дефиниција

Нека су $[p_1], [p_2], \ldots, [p_{n-1}]$ дисјунктне полиг. површи које припадају полиг. површи (p). Геометријски лик $(p) \setminus ([p_1] \cup [p_2] \cup \cdots \cup [p_{n-1}])$ је **отворена** n**-повезана** полигонска површ. $p \cup p_1 \cup \ldots p_{n-1}$ је њен руб, а унија отворене n-повезане полиг. површи и њеног руба је **затворена** n**-повезана полиг. површ**.



За n-повезане полигонске површи се дефинишу појмови и важе тврђења аналогна оним за полигонске површи.