Математички факултет
Универзитет у Београду

Мастер рад

C^0-**симплектичка топологија**

Студент: Максим Стокић

Ментор: др Дарко Милинковић

У Београду, 2018-2019.

Садржај

Садржај **1**

1 Увод у Флорове теорије **4**

1.1 Симплектичке многострукости и скоро комплексне структуре . . . 4

1.2 Хамилтонова Флорова теорија за симплектчки асферичне многострукости . . . 5

1.3 Лагранжева Флорова теорија за котангентна раслојења . . . 9

2 Спектралне инваријанте **11**

2.1 Хомологија поднивоа функције на затвореној многострукости . . . 11

2.2 Спектралне инваријанте у Хамилтоновој Флоровој теорији . . . 12

2.3 Лагранжеве спектралне инваријанте . . . 14

2.4 Неједнакости са симплектичким капацитетима . . . 17

2.5 Истрајни модули . . . 20

2.6 Бар кодови . . . 21

3 Симплектички и Хамилтонови хомеоморфизми **25**

3.1 Особине групе Хамилтонових хомеоморфизама . . . 27

4 C^0−непрекидност спектралне норме **32**

4.1 Доказ C^0 непрекидности спектралне норме . . . 33

4.2 Последице непрекидности спектралне норме . . . 37

5 Коизотропна ригидност **40**

5.1 Дефинисање C^0 коизотропних подмногострукости . . . 43

6 Арнолдова Хипотеза и Хамеоморфзми **45**

6.1 C^0 контрапример Арнолдове хипотезе . . . 46

6.2 Кратак опис конструкције контрапримера . . . 47

6.3 Покушај спасавања Арнолдове хипотезе за хомеоморфизме . . . 48

Литература **50**

Предговор

C^0-симплектичка топологија изучава понашање симплектичких објеката и инваријанти при C^0-лимесима. Први значајан резултат који је уједно и мотивација за изучавање ове облати је Громов Ељашбергова теорема о C^0-ригидности симплектоморфизама, која каже да је група симплетоморфизама C^0-затворена у групи дифеоморфизама. Овај изненађујући резултат нам омогућава да дефинишемо појам симплектичког хомеморфизма и отвара читав низ питања о симплектичкој ригидности и флексибилности ових пресликавања.

Општије питање је да ли је симплектичка топологија фундаментално о глатким објектима или неким мање регуларним објектима? Као илустрацију овог феномена дајемо пример кохомологије. За некога ко је само видео Де Рамову кохомологију појам кохомологије је везан само за глатке објекте, али наравно знамо да је кохомологија много општији концепт.

Често изучавање објеката мање регуларности (рецимо са слабијом топологијом) доводи до бољег разумевања глатких објеката, што је случај у C^0-симплектичкој топологији. На пример изучавањем C^0-ригидности Пуасонових заграда Буховски, Ентов и Полтерович су дефинисали нове инваријанте са Пуасоновим заградама које су нашле примене у глаткој Хамилтоновој динамици (погледати [22]). Још један такав пример је [23, 24, 25] где су Хумилиере, Леклерк и Сејфадини мотивисани конкретним питањима C^0-симплектичке топологије открили низ нових особина спектралних инваријанти за глатка пресликавања.

Из угла класичне механике сасвим је смислено изучавати ефекте C^0-пертурбација Хамилтонијана, јер оне могу да служе као модел за неправилности реалног света у многим ситуацијама.

Сингуларни симплектички објекти се све чешће јављају у новим истраживањима и њихово систематично изучавање је неизбежно, а C^0-симплектичка топологија представља један аспект овог тренда.

У првој глави дајемо кратак опис конструкција једноставнијих верзија Флорових теорија. Циљ те главе је само увођење основних појмова који ће нам бити неопходни у другој глави за дефинисање спектралних инваријантеи, које представљају један од најбитнијих објеката у изучавању C^0 симплектичке топологије. Поред спектралних инваријанти, у другој глави дефинишемо појам симплектичких капацитета, истрајне модуле и баркодове, па можемо рећи да ова глава уводи основне алате које ћемо користити у доказивању теорема из C^0 симплектичке топологије.

Трећа глава у потпуности прати рад [18] у коме су О и Милер дефинисали појмове симплектичких и Хамилтонових хомеоморфизама. Посебна пажњу обраћамо на Хамилтонове хомеоморфизме за које још увек не постоји опште прихваћена дефиниција, тако да ћемо дати две дефиниције за слабе и јаке Хамилтонове хомеоморфизме.

У четвртој, петој и шестој глави су представљени најбитнији резултати из C^0 симплектичке топологије, као и њихове последице.

На крају бих желео да се захвалим свом ментору, професору Дарку Милинковићу, који ми је помогао при одабиру и изради ове тезе. Његови савети и предавања су у великој мери унапредили мој начин учења и схватања математике. Такође, желео бих да се захвалим и члановима комисије професорима Игору Уљаревићу и Јовани Николић.

Глава 1

Увод у Флорове теорије

1.1 Симплектичке многострукости и скоро комплексне структуре

Симплектичка многострукост је пар (M,ω), где је M глатка многострукост, а ω затворена недегенерисана $2-$форма. *Симплектоморфизми* су дифеоморфизми који чувају симплектичку форму. Они чине групу коју означавамо $\mathrm{Symp}(M,\omega)$. За разлику од групе изометрија Риманове многострукости која је у генеричком случају тривијална, група симетрија симплектичке многострукости $\mathrm{Symp}(M,\omega)$ је увек бесконачна.

Хамилтонијан је глатка функција $H : \mathbb{R}\times M \to \mathbb{R}$ са компактним носачем. Некада уместо ознаке $H(t,x)$ пишемо $H_t(x)$. *Хамилтоново векторско поље* или *симплектички градијент* придружен хамилтонијану H је временски зависно векторско поље X_{H_t} дато као

$$\omega(X_{H_t},\cdot) = dH_t.$$

Диференцијална једначина $\frac{d}{dt}\phi_H^t = X_H(\phi_H^t), \quad \phi_H^0 = \mathrm{Id_M}$ задаје *Хамилтонов ток* ϕ_H^t. За дифеоморфизам ϕ_H^1 кажемо да је Хамилтонов дифеоморфизан генерисан са H. Сви Хамилтонови дифеоморфизми чувају симплектичку форму и чине групу Хамилтонових дифеоморфизама

$$\mathrm{Ham}(M,\omega) = \{\phi_H^1 \mid H : \mathbb{R}\times M \to \mathbb{R}\}.$$

Група $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ је нормална подгрупа групе $\mathrm{Symp}(M,\omega)$, што је једна од последица следећих идентитета за хамилтонијане H и G:

- $(\phi_H^t)^{-1} = \phi_{\overline{H}}^t$, где је $\overline{H}(t,x) = -H(t, \phi_H^t(x))$,
- $\phi_H^t \circ \phi_K^t = \phi_{H\#K}^t$, где је $H\#K(t,x) = H(t,x) + K(t, (\phi_H^t)^{-1}(x))$,
- $\psi^{-1} \circ \phi_H^t \circ \psi = \phi_{\psi^* H}^t$, где је $\psi \in \mathrm{Symp}(M,\omega)$ и $\psi^* H(t,x) = H(t, \psi(x))$.

Нека је (M,ω) симплектичка многострукост. Означимо са $[\omega]$ класу симплектичке форме у де Рамовој кохомологији.
Скоро комплексна структура на M је глатко пресликавање раслојења $J : TM \to TM$ које је линеарно по фибрама и за које је $J^2 = -\mathrm{Id}$. Кажемо да је скоро комплексна структура $\omega-$компатибилна ако је са $\omega(\cdot, J\cdot)$ дата Риманова метрика и ако је $\omega(J\cdot, J\cdot) = \omega$.

Став 1.1 *Скуп $\mathcal{J}$ свих $\omega-$компатибилних скоро комплексних структура на M је непразан и контрактибилан.*

Доказ. Погледати [1]. ☐

Прва Чернова класа комплексног векторског раслојења (TM, J) не зависи од $J \in \mathcal{J}$ и озачава се са $c_1(TM) \in H^2(M)$ (за дефиницију погледати [2]).
Кажемо да је симплектичка многострукост је *симплектички асферична* ако важи

$$\langle \omega, \pi_2(M) \rangle = 0 \quad \text{и} \quad \langle c_1(TM), \pi_2(M) \rangle = 0.$$

Овај услов је веома рестриктиван али укључује битне многострукости као што су торуси $\mathbb{T}^{2n}$ и површи позитивног рода и њихове производе.
Симплектичку многострукост називамо *монотоном* ако постоји $\lambda > 0$ за које важи $[\omega] = \lambda c_1(TM)$. Ова класа је много већа и укључује и комплексне пројективне просторе. Симплектичку многострукост зовемо *рационалном* ако је група $\langle \omega, \pi_2(M) \rangle$ дискретна.

1.2 Хамилтонова Флорова теорија за симплектчки асферичне многострукости

Нека је (M,ω) затворена симплектички асферична симплектичка многострукост. Флорова теорија је дефинисана и за општије класе симплектичких многострукости, али у овом случају можемо да заобиђемо квантну хомологију која ће бити изоморфна сингуларној и на тај начин једноставније дефинишемо спектралне инваријанте. Такође, сви резултати које ћемо презентовати су доказани за симплектички асферичне многострукости.

Означимо са $\Omega(M)$ простор глатких контрактибилних петљи на M, виђених као пресликавања $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \to M$. Нека је $H \in C^\infty([0,1] \times M)$ гладак Хамилтонијан. Њему придружујемо *Хамилтонов функционал дејства*

$$\mathcal{A}_H : \Omega(M) \to \mathbb{R}, \quad \gamma \mapsto \int_0^1 H(t, \gamma(t))dt - \int_{D^2} u^*\omega,$$

где је $u : D^2 \to M$ пресликавање за које важи $u|_{\partial D^2} = \gamma$. Дефиниција је добра јер због услова $\langle \omega, \pi_2(M) \rangle$ вредност $\int_{D^2} u^*\omega$ не зависи од избора пресликавања u. Функционал дејства је централни објекат у Хамилтоновој динамици због следећег става.

Став 1.2 *Критичне тачке функционала дејства $\mathcal{A}_H$ су $1-$периодичне орбите Хамилтоновог тока ϕ_H^t.*

Доказ. Нека је $\gamma \in \Omega(M)$ критична тачка и γ_s њена варијација, тако да $\gamma_0 = \gamma$ и $\xi = \frac{d}{ds}|_{s=0}\gamma_s(t) \in T_\gamma\Omega(M)$. Тада применом Картанове формуле добијамо

$$d\mathcal{A}_H(\gamma)\xi = -\int_0^1 \omega(\xi, \dot{\gamma} - X_H(\gamma))dt = 0.$$

Како варијацију бирамо призвољно, горњи интеграл се анулира ако и само ако важи $\dot{\gamma} = X_H(\gamma)$, односно критичне тачке су решења Хамилтонове једначине у $\Omega(M)$. $\square$

Дакле критичне тачке функционала дејства $\mathcal{A}_H$ су у бијекцији са фиксним тачкама Хамилтоновог дифеоморфизма ϕ_H^1.

Дефиниција 1.3 *Хамилтонијан H називамо недегенерисан ако је график пресликавања ϕ_H^1 трансверзалан на дијагоналу у $M \times M$.*

Флорова хомологија је првобитно конструисана како би се доказала *Арнолдова хипотеза* која предвиђа велики број фиксних тачака за Хамилтонов дифеоморфизам. Из претходних разматрања закључујемо да је довољно предвидети велики број критичних тачака функционала дејства $\mathcal{A}_H$, па би природан покушај био пробати Морсову теорију за функционал $\mathcal{A}_H$. Класичан простор на коме би посматрали овај функционал је простор Собољева $W^{1,2}_{\mathrm{contr}}(\mathbb{S}^1, M)$, међутим проблем је што је функционал $\mathcal{A}_H$ неограничен на овом простору и додатно Морсов индекс је бесконачан, тако да све технике класичне Морсове теорије овде не пролазе.

Флор је посматрао L^2-градијент на простору петљи $\Omega(M)$ дат уз помоћ скаларног производа дефинисаног као

$$\xi, \eta \in T_\gamma \Omega(M), \quad \langle \xi, \eta \rangle = \int_0^1 \omega(\xi(\gamma(t)), J_t \eta(\gamma(t)))dt$$

где је J_t фамилија $\omega-$компатибилних скоро комплексних структура, а ξ, η векторска поља дуж петље γ. Градијент у односу на овако дефинисан скаларни производ је

$$\nabla \mathcal{A}_H(\gamma) = J_t(\gamma)(\dot{\gamma} - X_H(\gamma)).$$

Негативна градијентна једначина за $x : \mathbb{R} \to \Omega(M)$ дата са

$$\frac{d}{ds} x(s) = -\nabla \mathcal{A}_H(x(s))$$

не дефинише ток на простору петљи. Флорова револуционарна идеја је да замени обичну диференцијалну једначину на простору петљи са парцијалном диференцијалном једначином на многострукости. Дефинишемо пресликавање $u : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \to M$ као $u(s,t) = x(s)(t)$. На овај начин уместо кривих у простору петљи посматрамо цилиндре на многострукости.
Негативна градијентна једначина сада постаје Флорова једначина

$$\partial_s u + J_t(u)(\partial_t u - X_{H_t}(u)) = 0. \tag{1.1}$$

Нека је H недегенерисан Хамилтонијан. Флоров комплекс $CF_*(H)$ је дефинисан као $\mathbb{Z}/2-$векторски простор генерисан са $\mathrm{Crit}(\mathcal{A}_H)$. Градуација овог векторског простора је задата уз помоћ Конли-Цендеровог индекса i_{CZ} (за дефиницију погледати [3]).

Скуп Флорових трајекторија између две критичне тачке γ_- и γ_+ функционала $\mathcal{A}_H$ је дефинисан као

$$\widehat{\mathcal{M}}(\gamma_-, \gamma_+; H, J) = \left\{ u : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \to M \,\middle|\, \begin{array}{l} u \text{ задовољава (1.1)} \\ \forall t \in \mathbb{S}^1, u(\pm\infty, t) = \gamma_\pm(t) \end{array} \right\}$$

где су лимеси $u(\pm\infty, t)$ равномерни по t. Приметимо да на горњем скупу имамо слободно $\mathbb{R}-$дејство транслацијама $s \mapsto s+\tau$. Модулски простор Флорових трајекторија између γ_- и γ_+ дефинисан је као $\mathcal{M}(\gamma_-, \gamma_+; H, J) := \widehat{\mathcal{M}}(\gamma_-, \gamma_+; H, J)/\mathbb{R}$.

Кажемо да је решење u Флорове једначине (1.1) *регуларно* ако је линеаризација оператора $u \mapsto \partial_s u + J_t(u)(\partial_t u - X_{H_t}(u))$ сурјективна у u. За скоро комплексну структуру J кажемо да је *регуларна* ако је свако $u \in \widehat{\mathcal{M}}(\gamma_-, \gamma_+; H, J)$ регуларно за сваки избор γ_- и γ_+. Регуларност скоро комплексне структуре J повлачи да су модулски простори $\mathcal{M}(\gamma_-, \gamma_+; H, J)$ глатке коначнодимензионе многострукости димензије $i_{\mathrm{CZ}}(\gamma_-) - i_{\mathrm{CZ}}(\gamma_+) - 1$, за $\gamma_- \neq \gamma_+$. Скуп регуларних скоро комплексних структура $\mathcal{J}_{reg}(H)$ је друге категорије у скупу свих $1-$периодичних $\omega-$компатибилних скоро комплексних структура (што значи да је генерички изабрана скоро комплексна структура J регуларна).

Ако је $i_{\mathrm{CZ}}(\gamma_-) - i_{\mathrm{CZ}}(\gamma_+) = 1$, модулски простор је компактан и димензије 0 па је коначан. Ово нам омогућава да дефинишемо Флоров гранични оператор $\partial : CF_*(H) \to CF_{*-1}(H)$

$$\partial\gamma_- = \sum_{\gamma_+} \#\mathcal{M}(\gamma_-, \gamma_+; H, J) \cdot \gamma_+$$

где је сума узета по свим $1-$периодичним орбитама γ_+ за које је $i_{\mathrm{CZ}}(\gamma_-) - i_{\mathrm{CZ}}(\gamma_+) = 1$ и $\#$ означава кардиналност скупа $\mathcal{M}(\gamma_-, \gamma_+; H, J)$ по модулу 2. Горња дефиниција се по линеарности проширује на цео комплекс.

Може се доказати да је $\partial^2 = 0$, што значи да је ∂ диференцијал на $CF_*(H)$ чију хомологију означавамо са $HF_*(H, J)$ и називамо *Флоровом хомологијом.*

Иако Флоров комплекс зависи од (H, J), Флорова хомологија не зависи. Наиме, постоје морфизми

$$\Psi_{H_0,J_0}^{H_1,J_1} : CF(H_0) \to CF(H_1)$$

који индукују изоморфизме у хомологији. Испоставља се да је Флорова хомологија изоморфна сингуларној, односно постоји $PSS-$изоморфизам (погледати [4])

$$\Phi_{H,J} : H_*(M) \to HF_*(H, J).$$

1.3 Лагранжева Флорова теорија за котангентна раслојења

Нека је L затворена многострукост, $(T^*L, d\lambda)$ симплектичка многострукост и λ Луивилова $1-$форма. Означимо са L_0 нулто сечење котангентног раслојења T^*L. Посматрајмо простор путева $\Omega(T^*L) = \{\gamma : [0,1] \to T^*L \mid \gamma(0), \gamma(1) \in L_0\}$ и на њему функционал дејства $\mathcal{A}_H^L$ дат са

$$\gamma \mapsto \int_0^1 H_t(\gamma(t))dt - \int \gamma^*\lambda.$$

Критичне тачке функционала дејства су Хамилтонови путеви који почињу и завршавају се на L_0, односно $\mathrm{Cirt}(\mathcal{A}_H^L) = \{\gamma \in \Omega(T^*L) \mid \frac{d}{dt}\gamma(t) = X_H(\gamma(t))\}$. Скуп критичних вредности функционала $\mathcal{A}_H^L$ називамо спектаром Хамилтонијана H и означавамо $\mathrm{Spec}_L(H)$. Спектар је нигде густ подскуп реалних бројева који зависи само од ϕ_H^1 па га некад означавамо и са $\mathrm{Spec}_L(\phi_H^1)$.

Посматрајмо $\mathbb{Z}_2-$векторски простор $CF_*(T^*L; H)$ разапет са $\mathrm{Crit}(\mathcal{A}_H^L)$. Нека је J_t фамилија $\omega-$компатибилних скоро комплексних структура. Фамилија J_t индукује скаларни производ на $\Omega(T^*L)$ дат са: за $\xi, \nu \in T_\gamma\Omega(T^*L)$ дефинишемо $\langle \xi, \nu \rangle := \int_0^1 \omega(\xi(t), J_t\nu(t))dt$. Градијент функционала дејства у односу на ову метрику је дат са

$$\nabla_\gamma \mathcal{A}_H^L(t) = J_t(\gamma(t))\left(\dot\gamma(t) - X_H(\gamma(t))\right).$$

Одговарајућу негативну градијентну једначину за $u : \mathbb{R}(s) \to \Omega(T^*L)$ називамо Флоровом једначином

$$\frac{\partial u}{\partial s} + J_t(u)\left(\frac{\partial u}{\partial t} - X_H(u)\right) = 0.$$

За $\gamma_\pm \in \mathrm{Crit}(\mathcal{A}_H^L)$ означимо са $\widehat{\mathcal{M}}(\gamma_-, \gamma_+)$ скуп решења Флорове једначине која задовољавају граничне услове $u(\pm\infty, \cdot) = \gamma_\pm$. На овом скупу имамо слободно $\mathbb{R}-$дејство транслацијама и количнички простор означавамо са $\mathcal{M}(\gamma_-, \gamma_+) := \widehat{\mathcal{M}}(\gamma_-, \gamma_+)/\mathbb{R}$.

За Хамилтонијан H називамо *недегенерисаним* ако је пресек $\phi_H^1(L_0) \cap L_0$ трансверзалан, а самим тим и скуп $\mathrm{Crit}(\mathcal{A}_H^L)$ коначан (генерички изабран Хамилтонијан је регуларан). Ако је још и J регуларна, модулски простори $\mathcal{M}(\gamma_+, \gamma_-)$ су коначнодимензионе глатке многострукости димензије $\mu_{CZ}(\gamma_-) - \mu_{CZ}(\gamma_+) - 1$, где је μ_{CZ} Конли-Цендеров индекс.

Означимо са $CF_k(T^*L; H)$ потпростор простора $CF_*(T^*L, H)$ разапет са елементима индекса $\mu_{CZ} = k$. Уз одређене претпоставке о скоро комплексној структури J_t модулски простори постају компактни, па ако је $\mu_{CZ}(\gamma_-) = \mu_{CZ}(\gamma_+) + 1$ димензија одговарајућег модулског простора ће бити 0 што нам омогућава да дефинишемо гранични оператор $\partial : CF_k(T^*L; H) \to CF_{k-1}(T^*L; H)$ као

$$\partial\gamma_- = \sum_{\mu_{CZ}(\gamma_+)=k-1} \#\mathcal{M}(\gamma_-, \gamma_+).$$

Испоставља се да је $\partial^2 = 0$, тако да $(CF_*(T^*L; H), \partial)$ постаје ланчасти комплекс чију одговарајућу Флорову хомологију означавамо са $HF_*(T^*L; H)$. Ова хомологија не зависи од H и канонски је изоморфна сингуларној хомологији $H_*(T^*L)$.

Глава 2

Спектралне инваријанте

Један од главних алата у C^0 симплектичкој топологији су симплектичке спектралне инваријане. Као мотивацију за дефиницију симплектичких спектралних инваријанти, прво наводимо пример *хомолошких минимакс селектора.*

2.1 Хомологија поднивоа функције на затвореној многострукости

Нека је f непрекидна функција на затвореној многострукости M. За реалан број t дефинишемо *подниво функције* f као

$$f^{\leq t} = \{x \in M \mid f(x) \leq t\}.$$

Инклузија поднивоа $f^{\leq t}$ у M индукује пресликавање на нивоу хомологије

$$\iota_t : H_*\left(f^{\leq t}\right) \to H_*(M).$$

Дефиниција 2.1 *За све хомолошке класе $\alpha \in H_*(M)\backslash\{0\}$ све непрекидне функције $f : M \to \mathbb{R}$, дефинишемо*

$$\rho(\alpha, f) = \inf_{[\sigma]=\alpha} \max_{|\sigma|} f,$$

где инфимум узимамо по свим циклима σ који представљају класу α, а $|\sigma|$ представља носач тог цикла.

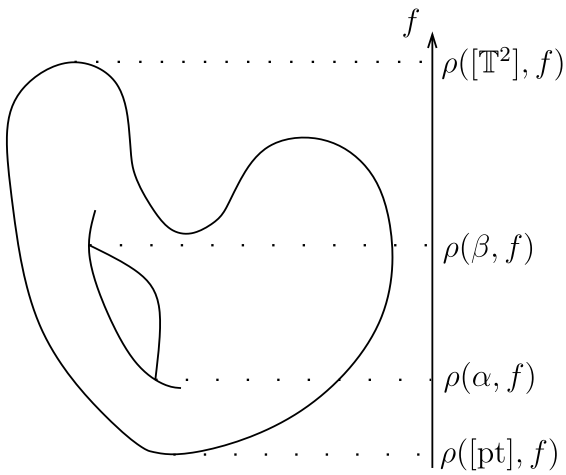
Алтернативно, хомолошке минимакс селекторе можемо да дефинишемо на више алгебарски начин као

$$\rho(\alpha, f) = \inf\{s \in \mathbb{R} \mid \alpha \in \mathrm{Im}(\iota_s)\}.$$

Пример 2.2 *1) Ако је M путно повезана тада је $\rho([\mathrm{pt}], M) = \min f$.*

2) Ако је M орјентабилна и $[M]$ представља њену фундаменталну класу, онда је M носач сваког цикла који представља $[M]$ па је $\rho([M], f) = \max f$.

3) Ако је $M = \mathbb{T}^2$ 2-торус, његова хомологија је генерисана са четири класе: $[\mathrm{pt}], [M], [\alpha], [\beta]$. Слика 1 приказује одговарајуће вредности селектора за функцију висине f.



Главно својство хомолошких минимакс селектора је њихова непрекидност:

Став 2.3 *[5] За све хомолошке класе $\alpha \in H_*(M)\backslash\{0\}$, пресликавање $\rho(\alpha, \cdot) : C^0(M) \to \mathbb{R}$ је Липшицово. Прецизније, важи:*

$$\big(\forall f, g \in C^0(M)\big) \quad \min(f - g) \leq \rho(\alpha, f) - \rho(\alpha, g) \leq \max(f - g).$$

Доказ. Погледати [5]. □

2.2 Спектралне инваријанте у Хамилтоновој Флоровој теорији

У овом делу користићемо нотацију и дефиниције из секције у којој смо дефинисали Хамилтонову Флорову теорију.

Дефиниција 2.4 *Спектар Хамилтонијана H у ознаци* $\mathrm{Spec}(H)$ *представља скуп критичних вредности функционала дејства $\mathcal{A}_H$.*

Познато је да је $\mathrm{Spec}(H)$ затворен подскуп реалних бројева који има Лебегову меру 0. Ако је (M, ω) симплектички асферична тада је $\mathrm{Spec}(H)$ компактан.

Став 2.5 *[7] Нека је (M, ω) симплектички асферична многострукост. Нека су H и G два Хамилтонијана за које важи $\phi_H^1 = \phi_G^1$. Тада постоји константа $C \in \mathbb{R}$ тако да важи*

$$\mathrm{Spec}(H) = \mathrm{Spec}(G) + C,$$

где је $\mathrm{Spec}(G) + C$ скуп добијен од $\mathrm{Spec}(G)$ додавањем C на сваки елемент.

Доказ. Погледати [7]. □

Из претходног става следи да је за дати Хамилтонов дифеоморфизам ϕ, његов спектар $\mathrm{Spec}(\phi)$ дефинисан добро до на помак за реалну константу. Треба нагласити да је рестрикција на симплектички асферичне многострукости овде неизоставна, у општем случају спектар Хамилтонијана зависи од целе изотопије ϕ_H^t а не само од ϕ_H^1.

Нека је $u : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \to M$ решење Флорове једначине (1.1). Енергија решења u је дефинисана као

$$E(u) := \int_{\mathbb{R}\times[0,1]} ||\partial_s u||^2 ds dt,$$

где је $||\cdot||$ норма настала од метрике $\omega(\cdot, J\cdot)$. Очигледно је $E(u) > 0$ за $u \neq const.$ За $\gamma_- \neq \gamma_+$ и $u \in \widehat{\mathcal{M}}(\gamma_-, \gamma_+; H, J)$ важи

$$\mathcal{A}_H(\gamma_-) - \mathcal{A}_H(\gamma_+) = E(u) > 0,$$

односно функционал дејства опада дуж Флорових трајекторија. Одавде закључујемо да је потпростор $CF_*^t(H)$ генерисан са Хамилтоновим петљама дејства мањег од t поткомплекс комплекса $CF_*(H)$. Означимо са $HF_*^t(H, J)$ хомологију овог поткомплекса, и са ι_s пресликавање у хомологији индуковано инклузијом $CF_*^t(H) \hookrightarrow CF_*(H)$.

Дефиниција 2.6 *За регуларан пар (H, J) и $\alpha \in H_*(M) \setminus \{0\}$ дефинишемо*

$$c(\alpha, H, J) = \inf\{s \in \mathbb{R} \mid \Phi_{H,J}(\alpha) \in \mathrm{Im}(\iota_s)\}.$$

Доказује се да $c(\alpha, H, J)$ не зависи од J, па ћемо у наставку користити ознаку $c(\alpha, H)$.

Теорема 2.7 *[7] Функција* $c : (H_*(M) \setminus \{0\}) \times C^\infty([0,1] \times M) \to \mathbb{R}$ *има следеће особине:*

1. *(спектралност)* $c(\alpha, H) \in \mathrm{Spec}(H)$,
2. *(монотоност) ако је* $H \leq G$, *тада је* $c(\alpha, H) \leq c(\alpha, G)$,
3. *(неједнакост троугла)* $c(\alpha \cap \beta, H \# G) \leq c(\alpha, H) + c(\beta, G)$,
4. *(непрекидност)* $|c(\alpha, H) - c(\alpha, G)| \leq ||H - G||_\infty$,
5. *(дуалност)* $c([M], H) = -c([\mathrm{pt}], \overline{H})$.

Доказ. Погледати [7]. □

Из непрекидности спектралних инваријанти (особина 4.) следи да дефиниција може да се прошири на све непрекидне Хамилтонијане.

2.3 Лагранжеве спектралне инваријанте

У овом делу користимо нотацију и дефиниције из секције о Лаграгранжевој Флоровој теорији за котангента раслојења. Зато нека је $(T^*L, d\lambda)$ симплектичка многострукост и нека је (H, J) регуларан пар.
Означимо са Ψ следећи канонски изоморфизам

$$\Psi : H_*(L) \to HF_*(T^*L; H, J)$$

између одговарајућих хомологија. Ако је $u : \mathbb{R} \times [0,1] \to M$ решење Флорове једначине, тада је његова енергија дефинисана са:

$$E(u) := \int_{\mathbb{R}\times[0,1]} ||\partial_s u||^2 dsdt.$$

Као и у Хамилтоновом случају за $\gamma_- \neq \gamma_+$ и $u \in \widehat{\mathcal{M}}(\gamma_-, \gamma_+; H, J)$ важи

$$\mathcal{A}_H^L(\gamma_-) - \mathcal{A}_H^L(\gamma_+) = E(u) > 0,$$

односно функционал дејства опада дуж Флорових трајекторија, а како гранични оператор броји градијентне трајекторије између критичних тачака закључујемо да је скуп $CF_*^t(T^*L; H)$ генерисан Хамилтоновим орбитама дејства мањег од t поткомплекс ланчастог комплекса $CF_*(T^*L; H)$. Означимо са $HF_*^t(L; H, J)$ хомологију овог поткомплекса и са $\iota_t : HF_*^t(T^*L; H, J) \to HF_*(T^*L; H, J)$ пресликавање у хомологији индуковано инклузијом $CF_*^t(T^*L; H) \hookrightarrow CF_*(T^*L, H)$.

Дефиниција 2.8 *За регуларан пар (H, J) и $\alpha \in H_*(L) \setminus \{0\}$ дефинишемо*

$$l(\alpha, H, J) := \inf\{s \in \mathbb{R} \mid \Psi(\alpha) \in \mathrm{Im}(\iota_s)\}.$$

Доказује се да $l(\alpha, H, J)$ не зависи од J, па пишемо $l(\alpha, H)$.

Теорема 2.9 *Функција $l : H_*(L) \times C^\infty([0,1] \times M) \to \mathbb{R}$ има следеће особине:*

1. *(спектралност)* $l(\alpha, H) \in \mathrm{Spec}(L; H)$,
2. *(монотоност) ако је $H \leq G$, тада је $l(\alpha, H) \leq l(\alpha, G)$,*
3. *(неједнакост троугла)* $l(\alpha \cap \beta, H\#K) \leq l(\alpha, H) + l(\beta, K)$
4. *(непрекидност)* $|l(\alpha, H) - l(\alpha, G)| \leq ||H - G||_\infty$
5. *(дуалност)* $l([M], H) = -l([\mathrm{pt}], \overline{H})$.

Доказ. Погледати [8, 15, 6]. □

Из особине непрекидности следи да дефиницију можемо да проширимо на све непрекидне Хамилтонијане.
Означимо са $l_-(H) := l([\mathrm{pt}], H)$ и $l_+ := l([L], H)$ спектралне инваријанте придружене класи тачке и фундаменталној класи. Ове инваријанте зависе само од ϕ_H^1 па су добро дефинисане на $\mathrm{Ham}^c(T^*L, d\lambda)$.

Дефиниција 2.10 *Спектрална или Витербоова норма је функција*

$$\gamma_L : \mathrm{Ham}^c(T^*L, d\lambda) \to \mathbb{R},$$

дата са $\gamma_L(\phi) = l_+(\phi) - l_-(\phi)$. Ако је L Хамилтонова деформација нултог сечења L_0 дефинишемо $\gamma(L, L_0) = \gamma_L(\phi)$, где је ϕ Хамилтонов дифеоморфизам за који је $\phi(L_0) = L$.

Ако су $\phi, \phi' \in \mathrm{Ham}^c(T^*L, d\lambda)$ и ако је $\phi(L_0) = \phi'(L_0)$ тада је $\gamma_L(\phi) = \gamma_L(\phi')$ одакле следи да је спектрална норма на простору Хамилтонових деформација нултог сечења добро дефинисана.
Спектрална норма има следеће особине (погледати [6]):

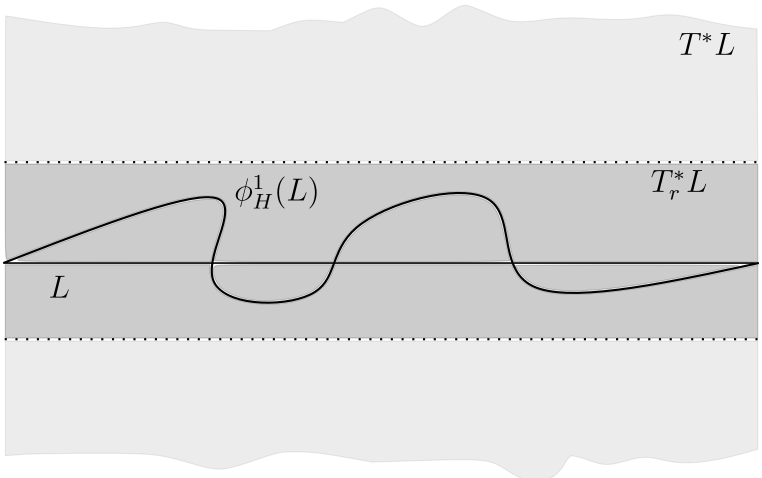
- (недегенерисаност) $\gamma_L(\phi) = 0 \iff \phi = \mathrm{Id}$
- (неједнакост троугла) $\gamma_L(\phi\psi) \leq \gamma_L(\phi) + \gamma_L(\psi)$

- (дуалност) $\gamma_L(\phi) = \gamma_L(\phi^{-1})$.

Спектрална норма је одозго ограничена Лагранжевом Хоферовом нормом Хамилтонијана, односно важи следећа неједнакост:

$$\gamma_L(\phi_H^1) \leq \int_0^1 (\max_{L_0} H(t,\cdot) - \min_{L_0} H(t,\cdot))dt.$$

Сада ћемо да дамо још једно горње ограничење спектралне норме које неће зависити од конкретног Хамилтоновог дифеоморфизма ϕ. Нека је g Риманова метрика на затвореној многострукости L и нека је $T_r^*L = \{(q,p) \in T^*L \mid ||p||_g \leq r\}$ котангетно диск раслојење радијуса r. Претпоставимо да је $\phi_H^t(L_0) \subset T_r^*L$ за све $t \in [0,1]$. Витербо је поставио хипотезу да тада постоји константа $C > 0$ која зависи од g, таква да је $\gamma_L(\phi_H^1) \leq Cr$. Следећа лема даје позитиван одговор за специјалан случај ове хипотезе.



Лема 2.11 *[10] Нека је L затворена многострукост, $\mathcal{V}$ прави отворен подскуп од L и $V = \pi^{-1}(\mathcal{V})$, где је $\pi : T^*L \to L$ стандардна пројекција. Постоји константа $C > 0$, која зависи од $\mathcal{V}$, таква да важи: За све $r > 0$, ако је $H \in C_c^\infty([0,1] \times T^*L)$ Хамилтонијан за кога важи $H|_V = 0$ и $\phi_H^t(L_0) \subset T_r^*L$ за све $t \in [0,1]$ тада $\gamma_L(\phi_H^1) \leq Cr$.*

Доказ. Погледати [10]. □

2.4 Неједнакости са симплектичким капацитетима

Кажемо да је Хамилтонијан H *спор* ако њему придружен ток ϕ_H^t нема нетривијалних контрактибилних периодичних орбита периода ≤ 1. Означимо са $\mathcal{H}(U)$ скуп свих аутономних, спорих Хамилтонијана, који су ненегативни и носач им је садржан у U.
Фиксирајмо Лагранжеву подмногострукост L, такву да је $L \cap U \neq \emptyset$. Хамилтонијан H називамо $L-$*спорим* ако њему придружен ток нема нетривијалних орбита временске дужине ≤ 1 које крећу и завршавају се на L. Означимо са $\mathcal{H}(U, L)$ скуп свих аутономних, $L-$спорих Хамилтонијана, који су ненегативни, носач им је садржан у U и достижу максимум на L.

Дефиниција 2.12 *1. (Хофер-Цендеров капацитет) Нека је U отворен подскуп симплектичке многострукости. Хофер-Цендеров капацитет скупа U је дефинисан као:*

$$c_{\mathrm{HZ}}(U) = \sup\{\max H \mid H \in \mathcal{H}(U)\}.$$

2. (Лиси-Рисеров релативни капацитет) Нека је U отворен подскуп симплектичке многострукости који има непразан пресек са Лагранжевом подмногострукошћу L. Лиси-Рисеров капацитет скупа U релативан у односу на L је дефинисан као:

$$c_{\mathrm{LR}}(U, L) = \sup\{\max H \mid H \in \mathcal{H}(U, L)\}.$$

Хофер-Цендеров капацитет је симплектички капацитет у смислу Екланда и Хофера, односно задовољава следеће аксиоме:

Став 2.13 (Екланд-Хофер) *1. Ако је $U \subset V$ тада је $c_{\mathrm{HZ}}(U) \leq c_{\mathrm{HZ}}(V)$,*

2. За сваке две симплектичке многострукости $(M, \omega), (M', \omega')$, све отворене подскупове $U \subset M$ и све дифеоморфизме $\phi : M \to M'$ такве да је $\phi^*\omega' = \lambda^2\omega$ важи $c_{\mathrm{HZ}}(\phi(U)) = \lambda^2 c_{\mathrm{HZ}}(U)$,

3. $c_{\mathrm{HZ}}(B^{2n}(1)) = c_{\mathrm{HZ}}(Z^{2n}(1)) = \pi$, где је $B^{2n}(1)$ јединична лопта и $Z^{2n}(1) = B^2(1) \times \mathbb{R}^{2n-2}$ стандардан цилиндар.

Доказ. Погледати [11]. □

Аналогне особине има и Лиси-Рисеров релативни капацитет:

Став 2.14 (Лиси-Рисер) *[12]*

1. *Ако је $U \subset V$ тада је $c_{\mathrm{LR}}(U) \leq c_{\mathrm{LR}}(V)$,*

2. *За сваке две симплектичке многострукости $(M, \omega), (M', \omega')$, све отворене подскупове $U \subset M$, све Лагранжеве подмногострукости L и све дифеоморфизме $\phi : M \to M'$ такве да је $\phi^*\omega' = \lambda^2\omega$ важи $c_{\mathrm{LR}}(\phi(U), \phi(L)) = \lambda^2 c_{\mathrm{LR}}(U, L)$,*

3. *$c_{\mathrm{LR}}(B^{2n}(1), \mathbb{R}^n) = c(Z^{2n}(1), \mathbb{R}^n) = \pi/2$.*

Доказ. Погледати [12]. □

Хамилтонов случај

Кажемо да Хамилтонов дифеоморфизам ϕ раздваја подскуп U од самог себе ако је $\phi(U) \cap U = \emptyset$.

Став 2.15 *Ако Хамилтонов дифеоморфизам ϕ_H^1 раздваја отворен подскуп U и ако је носач хамилтонијана G садржан у U, тада је*

$$c([M], G) \leq c([M], H) + c([M], \overline{H}).$$

Доказ. Погледати [13]. □

Дефиниција 2.16 *Вредност $c([M], H) + c([M], \overline{H})$ се назива спектрална норма или Витербоова норма и означава се са $\gamma(H)$.*

Претходни став нам гарантује недегенерисаност спектралне норме. Следећа неједнакост се назива *строгом неједнако71у између енергије и капацитета*:

Теорема 2.17 (строга неједнакост између енергије и капацитета) *[13]* *Ако Хамилтонов дифеоморфизам ϕ_H^1 раздваја отворен подскуп U тада је*

$$c_{\mathrm{HZ}}(U) \leq \gamma(H).$$

Доказ. Погледати [13]. □

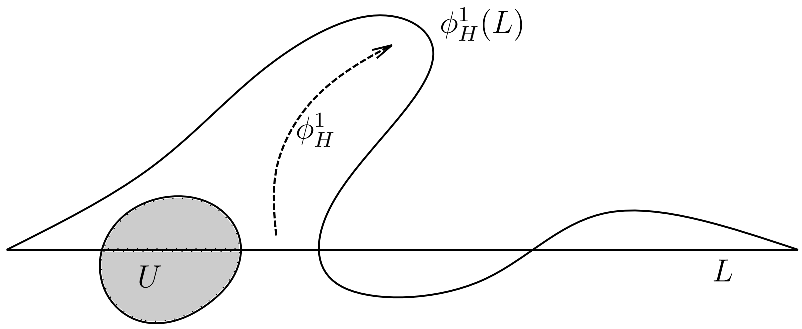
Последица теореме је позната неједнакост између енергије и капацитета:

Став 2.18 *Ако Хамилтонов дифеоморфизам раздваја отворен подскуп U од самог себе, тада је*

$$c_{\mathrm{HZ}}(U) \leq ||\phi_H^1||_{\mathrm{Hofer}}.$$

Лагранжев случај

Релативна верзија неједнакости између енергије и капацитета нам каже да је минимална енергија потребна да би се Лагранжева подмногострукост раздвојила од отвореног скупа строго позитивна.



Теорема 2.19 *[16] Нека је L_0 нулто сечење, U отворен подскуп симплектичке многострукости $(T^*L, d\lambda)$ и нека је $L \cap U \neq \emptyset$. Ако је H Хамилтонијан за који је $\phi_H^1(L_0) \cap U = \emptyset$. Тада је*

$$c_{\mathrm{LR}}(U; L_0) \leq \gamma_L(H).$$

Доказ. Погледати [16]. □

Како је $\gamma_L(\phi_H^1) = \gamma_L\left((\phi_H^1)^{-1}\right)$, напоменимо да горња неједнакост важи у случају када је $L_0 \cap \phi_H^1(U) = \emptyset$.

Последица. Коришћењем теореме и неједнакости са спектралном нормом добијамо да важи $c_{\mathrm{LR}}(U; L_0) \leq \int_0^1 (\max_{L_0} H_t - \min_{L_0} H_t) dt$.

Дефиниција 2.20 *На простору Хамилтонових деформација нултог сечења, дефинишемо Лагранжеово Хоферово растојање између две Лагранжеве подмногострукости L, L' као*

$$\delta(L,L') = \inf\Big\{ \int_0^1 (\max_L H_t - \min_L H_t)dt \mid \phi_H^1(L) = L' \Big\}.$$

Сада последицу можемо да формулишемо у облику следећег става из кога следи недегенерисаност Лагранжеве Хоферове метрике:

Став 2.21 *Ако Хамилтонов дифеоморфизам ϕ раздваја нулто сечење L_0 од отвореног скупа U односно $\phi(L_0) \cap U = \emptyset$, тада је $c_{\mathrm{LR}}(U) \leq \delta(L_0, \phi(L_0))$.*

2.5 Истрајни модули

Испоставља се да је могуће уопштити дефиницију спектралних инваријанти у много различитих ситуација. У овом делу ћемо дефинисати *истрајне модуле* који представљају апстрактну алгебарску структуру погодну за ово уопштење. Постоји више приступа овој теорији, а ми ћемо пратити [14].

Дефиниција 2.22 (Истрајни модул) *За дати прстен R, истрајни модул представља фамилију $R-$модула $Q^\bullet = (Q^t)_{t\in\mathbb{R}}$ заједно са пресликавањима $\iota_s^t : Q^t \to Q^s$ за све $s \leq t$ која здовољавају:*

- *За све $t \in \mathbb{R}$, ι_t^t је идентичко пресликавање $Q^t \to Q^t$,*
- *За све $r, s, t \in \mathbb{R}$, такве да је $r \leq s \leq t$ важи $\iota_s^t \circ \iota_r^s = \iota_r^t$.*

Са Q означавамо директан лимес

$$Q = \varinjlim_{t\to+\infty} Q^t,$$

и са $\iota_s : Q^s \to Q$ означавамо природну инклузију.
Ако је $Q^t = Q^s$ и $\iota_s^t = \mathrm{Id}$ за довољно велике s и t, кажемо да се истрајни модул Q стабилизује. У том случају је $Q = Q^t$ и $\iota_s = \iota_s^t$ за довољно велико t.

За наше потребе најинтересантнији примери истрајних модула ће бити они који настају од *филтрираних комплекса*, односно ланчастих комплекса (C, ∂) заједно са фамилијом поткомплекса $(C^t)_{t\in\mathbb{R}}$ таквих да за $s \leq t$ имамо $C^s \subset C^t$.

Од филтрираног комплекса добијамо истрајни модул тако што посматрамо хомологију поткомплекса $Q^t = H(C^t, \partial)$, док нам инклузије $C^s \subset C^t$ индукују пресликавања у хомологији ι_s^t.

Пример 2.23 *Ако је X компактан тополошки простор и $f : X \to \mathbb{R}$ непрекидна функција, тада сингуларни ланчасти комплекс $C_*(X)$ допушта филтрацију дату сингуларним ланцима чије су вредности у скупу $f^{\leq t}$. Индуковани истрајни модул је фамилија $Q^t = H_*(f^{\leq t}, R)$, у којој су пресликавања ι_s^t индукована инклузијама $f^{\leq s} \to f^{\leq t}$ за $s \leq t$.*

Дефиниција 2.24 (Спектралне инваријанте за истрајне модуле) *Нека је $Q^\bullet$ истрајни модул. Сваком $\alpha \in Q \setminus \{0\}$ придружујемо реалан број*

$$c(\alpha, Q^\bullet) = \inf\{s \in \mathbb{R} \mid \alpha \in \mathrm{Im}(\iota_s)\}.$$

Уколико се истрајни модул $Q^\bullet$ стабилизује, онда је $c(\alpha, Q^\bullet)$ коначан.
Од два истрајна модула Q_1, Q_2 можемо да формирамо њихову директну суму $Q := (Q_1^t \oplus Q_2^t)_{t\in\mathbb{R}}$. Морфизме ι_s^t на Q добијамо као директну суму морфизама на Q_1 и Q_2. За дати интервал $I = (a, b]$, где је $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, дефинишемо истрајни модул

$$Q(I) = \begin{cases} R, & t \in I \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

где су морфизми ι_s^t дефинисани да буду идентитет ако $a < s \leq t \leq b$, и 0 иначе.

2.6 Бар кодови

Коначан бар код $\mathcal{B} = \{(I_j, m_j)\}_{j=1}^N$ је коначан скуп интервала $I_j = (a_j, b_j], a_j \in \mathbb{R}, b_j \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ са вишеструкостима $m_j \in \mathbb{N}$. Кажемо да су два бар кода $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ $\delta-$упарени ако, након брисања неколико интервала укупне дужине мање или једнаке од 2δ, постоји бијективно упаривање интервала тако да су крајеви упарених интервала на растојању мањем или једнаком од δ.

Пример 2.25 *Бар кодови* $\{((0, 1], 1), ((0, 3], 2), ((10, 20], 1)\}$ *и* $\{((0, 4], 1), ((1, 3], 1), ((11, 18], 1)\}$ *су* $2-$*упарени.*

Растојање између два бар кода дефинишемо као инфимум свих δ таквих да су бар кодови $\delta-$упарени и означавамо са $d_{\mathrm{bottle}}(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2)$.

Простор свих коначних бар кодова са Bottleneck растојањем није комплетан метрички простор. Његово комплетирање захтева увођење и неких бесконачних бар кодова.

Дефиниција 2.26 *Бар код* $\mathcal{B}\{(I_j, m_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ *је колекција интервала*

$$I_j = (a_j, b_j], a_j \in \mathbb{R}, \quad b_j \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

са вишеструкостима $m_j \in \mathbb{N}$, *тако да за свако* $\epsilon > 0$ *постоји само коначно интервала* I_j *дужине веће од* ϵ.

Растојање између коначних бар кодова се проширује на бар кодове. Ако означимо са Barcodes скуп свих бар кодова, тада је $(\text{Barcodes}, d_{\text{bottle}})$ комплетирање простора коначних бар кодова. За дати бар код $\mathcal{B} = \{(I_j, m_j)\}_{j\in\mathbb{N}}$ дефинишемо његов спектар, $\text{Spec}(\mathcal{B})$, као скуп крајњих тачака интервала I_j.

Бар кодови за Хамилтонијане

У овом делу описаћемо канонски начин за придруживање бар кода датом Хамилтонијану. За то ће нам бити потребна *структурна теорема* за истрајне модуле:

Теорема 2.27 *За сваки истрајни модул* Q *постоји јединствен коначан бар код* $\mathcal{B}(Q) = \{(I_j, m_j)\}_{j=1}^N$ *такав да је* Q *изоморфно са* $\bigoplus_{j=1}^N Q(I_j)^{m_j}$.

Доказ. Погледати [17]. □

Претпоставимо сада да је H недегенерисан. Функционал дејства задаје филтрацију Хамилтоновог Флоровог комплекса чија хомологија даје истрајни модул $Q = (HF_*^t(H))_{t\in\mathbb{R}}$. Инклузије на нивоу комплекса индукују пресликавања у хомологији, па ако фиксирамо Конли-Цендеров индекс j добићемо истрајне модуле $Q_j = (HF_j^t(H))_{t\in\mathbb{R}}$ са истим пресликавањима, само посматраних на j-тим хомолошким групама. Очигледно ће важити $Q = \bigoplus_j Q_j$.
Из структурне теореме за истрајне модуле следи да сваком недегенерисаном Хамилтонијану H можемо да придружимо бар код $\mathcal{B}(H)$ који одговара истрајном модулу Q, и бар кодове $\mathcal{B}_j(H)$ који одговарају истрајним модулима Q_j.
Лако се проверава да важи

$$\mathcal{B}(H) = \sqcup_j \mathcal{B}_j(H).$$

Приметимо да спектралне инваријанте Хамилтонијана H одговарају крајњим тачкама полубесконачних интервала бар кода $\mathcal{B}(H)$. У наставку наводимо особине овако насталих бар кодова (за доказ погледати [14]):

- **Непрекидност:** $d_{\text{bottle}}(\mathcal{B}_j(H), \mathcal{B}_j(G)) \leq ||H - G||$, ова неједнакост нам омогућава да проширимо дефиницију бар кода са недегенрисаних на било који гладак, па чак и непрекидан Хамилтонијан. За произвољно непрекидно H, узмимо низ недегенерисаних Хамилтонијана H_i, таквих да $||H - H_i|| \to 0$ и дефинишимо $\mathcal{B}_j(H) := \lim \mathcal{B}_j(H_i)$ где је лимес посматран у односу да d_{bottle}. На тај начин добијамо непрекидно пресликавање

$$\mathcal{B}_j : C^\infty([0,1] \times M) \to \text{Barcodes}.$$

  Јасно је да ће наведена особина непрекидности важити и за бар код $\mathcal{B}(H)$ такође.

- **Спектралност:** Ако је H недегенерисан онда је $\text{Spec}(\mathcal{B}(H)) = \text{Spec}(H)$, а ако је H произвољан гладак важиће $\text{Spec}(\mathcal{B}(H)) \subset \text{Spec}(H)$.

- **Инваријантност:** За сваки $\psi \in \text{Symp}(M, \omega)$ и било који гладак хамилтонијан H важи

$$\mathcal{B}_j(H \circ \psi) = \mathcal{B}_j(H), \quad \mathcal{B}(H \circ \psi) = \mathcal{B}(H).$$

Бар кодови за Хамилтонове дифеоморфизме

За дати бар код $\mathcal{B} = \{(I_j, m_j)\}_{j=1}^{\infty}$ и $c \in \mathbb{R}$ дефинишемо $\mathcal{B} + c = \{(I_j + c, m_j)\}_{j=1}^{\infty}$. Означимо са $\sim$ релацију еквиваленције на простору бар кодова дату са $\mathcal{B} \sim \mathcal{C}$ ако постоји $c \in \mathbb{R}$ тако да важи $\mathcal{C} = \mathcal{B} + c$ и означимо одговарајући количнички простор са $\widehat{\text{Barcodes}}$. Bottleneck растојање се преноси на $\widehat{\text{Barcodes}}$ и наставићемо да га означавамо са d_{bottle}.
Претпоставимо сада да су H, H' два хамилтонијана која генеришу исти дифеоморфизам $\phi_H^1 = \phi_{H'}^1$. Тада ће постојати $c \in \mathbb{R}$ тако да важи $\mathcal{B}(H) = \mathcal{B}(H') + c$ и $\mathcal{B}_j(H) = \mathcal{B}_j(H') + c$, одакле закључујемо да пресликавања дефинисана у претходном делу индукују пресликавања

$$\mathcal{B}, \mathcal{B}_j : \text{Ham}(M, \omega) \to \widehat{\text{Barcodes}}.$$

Следеће особине се директно изводе из особина бар кодова за хамилтонијане:

- **Непрекидност:** $d_{\mathrm{bottle}}(\mathcal{B}_j(\phi), \mathcal{B}_j(\psi)) \leq d_{\mathrm{Hofer}}(\phi, \psi)$ за свака два $\phi, \psi \in \mathrm{Ham}(M)$. Такође важи $d_{\mathrm{bottle}}(\mathcal{B}(\phi), \mathcal{B}(\psi)) \leq d_{\mathrm{Hofer}}(\phi, \psi)$.

- **Спектралност:** Класа еквиваленције бар кода у $\widehat{\mathrm{Barcodes}}$ има дефинисан спектар до на помак за реалну константу, а иста ствар важи и за спектар Хамилтоновог дифеоморфизма ϕ. Тако да можемо да закључимо да је $\mathrm{Spec}(\mathcal{B}(\phi)) \subset \mathrm{Spec}(\phi)$, што заправо значи да је $\mathrm{Spec}(\mathcal{B}(\phi))$ подскуп од $\mathrm{Spec}(\phi)$ до на помак за реалну константу.

- **Инваријантност:** За свако $\psi \in \mathrm{Symp}(M, \omega)$ и свако $\phi \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$ важи

$$\mathcal{B}_j(\psi^{-1}\phi\psi) = \mathcal{B}_j(\phi), \quad \mathcal{B}(\psi^{-1}\phi\psi) = \mathcal{B}(\phi).$$

  Ова једнакост следи из особине инваријантности за бар кодове хамилтонијана и чињенице да је $\phi^t_{H\circ\psi} = \psi^{-1}\phi^t_H\psi$.

Глава 3

Симплектички и Хамилтонови хомеоморфизми

За почетак, подсетимо се дефиниције C^0-топологије на групи хомеоморфизама $\mathrm{Homeo}(M)$ затворене многострукости M. Фиксирајмо Риманову метрику на M и означимо са d индуковану функцију растојања на M. Означимо са d_{C^0} стандардно C^0-растојање између пресликавања дато са

$$d_{C^0}(\phi, \psi) = \max_{x \in M} d(\phi(x), \psi(x)).$$

Тада за хомеоморфизме $\phi, \psi \in \mathrm{Homeo}(M)$ дефинишемо њихово C^0-растојање као

$$\overline{d}(\phi, \psi) = \max\{d_{C^0}(\phi, \psi), d_{C^0}(\phi^{-1}, \psi^{-1})\}.$$

У односу на ову метрику $\mathrm{Homeo}(M)$ постаје комплетан метрички простор. Топологију индуковану метриком $\overline{d}$ називамо C^0-*топологијом* на $\mathrm{Homeo}(M)$. Ова топологија се поклапа са компактно-отвореном топологијом, одакле следи да она не зависи од избора Риманове метрике.

Нека је сада (M, ω) затворена симплектичка многострукост. Означимо са $\mathrm{Symp}(M, \omega)$ групу симплектичких дифеоморфизама, тј подгрупу групе $\mathrm{Diff}(M)$ која садржи дифеоморфизме $\phi : M \to M$ за које је $\phi^*\omega = \omega$. У $C^\infty-$топологији на $\mathrm{Diff}(M)$ подгрупа $\mathrm{Symp}(M, \omega)$ је затворена тополошка подгрупа. Путну компоненту идентитета у $\mathrm{Symp}(M, \omega)$ у индукованој $C^\infty-$топологији означавамо са $\mathrm{Symp}_0(M, \omega)$. Чувена Громов-Ељашбергова теорема тврди

Теорема 3.1 *[18] Подгрупа* $\mathrm{Symp}(M, \omega) \subset \mathrm{Diff}(M)$ *је затворена у* C^0-*топологији.*

Доказ. Погледати [18]. $\square$

Сада је природно дефинисати симплектичке хомеоморфизме као затворење $\overline{\mathrm{Symp}(M,\omega)} \subset \mathrm{Homeo}(M)$, где је затворење у односу на C^0-топологију унутар групе хомеоморфизама.

Дефиниција 3.2 *Горње затворење опремљено са C^0-топологијом означавамо са*

$$\mathrm{Sympeo}(M,\omega) := \overline{\mathrm{Symp}(M,\omega)},$$

и зовемо ову групу група симплектичких хомеоморфизама.

За почетак приметимо да симплектички хомеоморфизми чувају *Лиувилову меру* индуковану формом запремине

$$\Omega = \frac{1}{n!}\omega^{\wedge n}$$

што је последица Фатуове леме у теорији мере. Ова чињеница следи из општијег резултата: скуп хомеоморфизама који чувају меру је затворен у групи хомеоморфизама у компактно-отвореној топологији (пропозиција 2.1. у [18]). У димензији два важи да је $\mathrm{Sympeo}(M,\omega) = \mathrm{Homeo}^{\Omega}(M)$, где је $\mathrm{Homeo}^{\Omega}(M)$ група хомеоморфизама који чувају Лиувилову меру. Ово следи из чињенице да било који хомеоморфизам који чува површину, може бити добијен као C^0-лимес дифеоморфизама који чувају површину у димензији 2 (теорема 5.1. у [18]). Ако је $\dim M \geq 4$ онда на основу Ељашбергове теореме о ригидности имамо да важи

$$\mathrm{Sympeo}(M,\omega) \subsetneq \mathrm{Homeo}^{\Omega}(M).$$

Од великог значаја у симплектичкој топологији је подгрупа *Хамилтонових дифеоморфизама* $\mathrm{Ham}(M,\omega) \subset \mathrm{Symp}_0(M,\omega)$. Конструкција групе Хамилтонових хомеоморфизама није тако природна као конструкција групе симплектичких хомеоморфизама. О и Милер у свом раду [18] наводе да је прецизна формулација топологије на овој групи веома битна за непрекидност спектралних инваријанти, као и за конструкцију C^0-верзија одговарајућих $C^\infty-$објеката или инваријанти.

Дефиниција 3.3 (Слаби Хамилтонови хомеоморфизми) *Затворење групе $\mathrm{Ham}(M,\omega) \subset \mathrm{Diff}(M)$ у C^0-топологији означавамо са $\overline{\mathrm{Ham}}(M,\omega)$ и елементе тог скупа називамо слабим Хамилтоновим хомеоморфизмима.*

Следећа дефиниција коју су поставили О и Милер нам гарантује да је Хамилтонов хомеоморфизам генерисан непрекидним хамилтонијаном, што даје више сличности са глатким случајем.

Дефиниција 3.4 (Хамеоморфизми) *Нека је $(\phi^t)_{t\in[0,1]}$ изотопија хомеоморфизама симплектичке многострукости M (односно непрекидно пресликавање $[0,1] \to (\mathrm{Homeo}(M), d_{C^0})$, $t \mapsto \phi^t$). Кажемо да је ϕ^t непрекидна Хамилтонова изотопија (или краће „хамеотопија") ако постоји компакт $K \subset M$ и низ глатких Хамилтонијана $H_i : [0,1] \times M \to \mathbb{R}$ са носачем у K таквих да важи:*

1. *Низ $\phi^t_{H_i}$ C^0-конвергира ка ϕ^t униформно по t, тј.*

$$\lim_{i\to\infty} \max_{t\in[0,1]} \overline{d}(\phi^t_{H_i}, \phi^t) = 0.$$

2. *Низ H_i униформно конвергира ка непрекидној функцији $H : [0,1]\times M \to \mathbb{R}$, односно $||H_i - H||_\infty \to 0$, где је $||\cdot||_\infty$ супремум норма.*

Кажемо да H генерише ϕ^t (означавамо са ϕ^t_H) и називамо H непрекидним Хамилтонијаном. Са $C^0_{\mathrm{Ham}}(M,\omega)$ означавамо скуп свих непрекидних Хамилтонијана. Хомеорфизам називамо Хамилтоновим ако је једнак ϕ^1_H за $H \in C^0_{\mathrm{Ham}}(M,\omega)$.

Скуп свих Хамилтонових хомеоморфизама означавамо $\mathrm{Hameo}(M,\omega)$, а ускоро ћемо видети да има структуру групе.

3.1 Особине групе Хамилтонових хомеоморфизама

Следећа теорема показује да се непрекидне Хамилтонове изотопије понашају слично као глатке и оправдава исказ „H генерише ϕ^t" и нотацију $\phi^t = \phi^t_H$.

Теорема 3.5 (Јединственост)

1. *(О-Милер) Непрекидан хамилтонијан у горе наведеном смислу генерише јединствену хамеотопију.*

2. *(Витербо) Свака хамеотопија је генерисана јединственим непрекидним хамилтонијаном (до на додавање функције времена).*

Доказ за 1. Претпоставимо супротно, нека су ϕ^t и ψ^t две различите изотопије које су генерисане са $(H_i)_{i\in\mathbb{N}}$ и $(H'_i)_{i\in\mathbb{N}}$ за које је $||H_i - H||_\infty, ||H'_i - H||_\infty \to 0$. Тада постоји $t_0 \in [0,1]$ за које је $\phi^{t_0} \circ (\psi^{t_0})^{-1} \neq \mathrm{Id}$. Након репараметризације, можемо претпоставити да је $t_0 = 1$.
Како је $\phi^1 \circ (\psi^1)^{-1} \neq \mathrm{Id}$, то ће постојати довољно мала лопта B коју Хамеоморфизам $\phi^1 \circ (\psi^1)^{-1}$ раздваја од себе. Тада за довољно велико i Хамилтонови дифеоморфизми $\phi^1_{H_i} \circ \left(\phi^1_{H'_i}\right)^{-1} = \phi^1_{H_i \# \overline{H'_i}}$ такође раздвајају B саму од себе, па на основу неједнакости између енергије и капацитета добијамо

$$c_{\mathrm{HZ}}(B) \leq \int_0^1 \left[\max_{x\in M} H_i\#\overline{H'_i}(t,\cdot) - \min_{x\in M} H_i\#\overline{H'_i}(t,\cdot)\right] dt.$$

Међутим како $\int_0^1 \operatorname*{osc}_{x\in M} H_i\#\overline{H'_i}(t,\cdot)dt \leq ||H_i - H'_i||_\infty \to 0$, то ће интеграл на десној страни тежити ка 0, одакле добијамо контрадикцију јер је $c_{\mathrm{HZ}}(B) > 0$.
Доказ за 2. може се наћи у [15]. □

Генератори Хамеотопија задовољавају исте формуле за композицију као у глатком случају. Наиме, ако су дате две Хамеотопије ϕ_H и ϕ_K, тада је формулом

$$(H\#K)_t = H_t + K_t \circ (\phi^t_H)^{-1}$$

дат непрекидан Хамилтонијан који генерише Хамеотопију $\phi_H\phi_K : t \mapsto \phi^t_H\phi^t_K$. Инверзни Хамилтонијан $\overline{H}$ коме одговара инверзна Хамеотопија $(\phi_H)^{-1} : t \mapsto (\phi^t_H)^{-1}$ је дат са

$$(\overline{H})_t = -H_t \circ \phi^t_H.$$

Ако је $H \in C^0_{\mathrm{Ham}}(N)$ и $h : M \to N$ симплектички хомеоморфизам, тада $H \circ h$ припада $C^0_{\mathrm{Ham}}(M)$ и генерише Хамеотопију $h^{-1}\phi^t_H h$. Доказе ових ствари остављамо за вежбу. Из претходног следи следећа теорема:

Теорема 3.6 *[18] Група* $\mathrm{Hameo}(M,\omega)$ *је нормална подгрупа групе* $\mathrm{Sympeo}(M,\omega)$.

Доказ. Погледати [18]. □

Следећа теорема је директна последица Арнолдове хипотезе.

Теорема 3.7 *[18] Нека је (M,ω) затворена симплектичка многострукост. Тада било који C^0-лимес Хамилтонових дифеоморфизама има фиксну тачку. Специјално, сваки Хамилтонов хомеоморфизам има фиксну тачку.*

Доказ. Нека је $h = \lim_{C^0} \phi_i$ за низ $\phi_i \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$. Претпоставимо супротно, да h нема фиксну тачку. Ако означимо $d^h_{\min} := \inf_{x \in M} d(x, h(x))$, из компактности M ће следити да је $d^h_{\min} > 0$. Међутим из Арнолдове хипотезе следи да сваки ϕ_i мора имати фиксну тачку x_i, па имамо

$$\overline{d}(h, \phi_i) \geq d(h(x_i), \phi_i(x_i)) = d(h(x_i), x_i) \geq d^h_{\min} > 0$$

одакле добијамо контрадикцију са чињеницом да је

$$\lim_{i \to \infty} \overline{d}(h, \phi_i) = 0.$$

Дакле h мора имати бар једну фиксну тачку. $\square$

Видећемо да за $\dim M \geq 4$ постоји хамеоморфизам са тачно једном фиксном тачком па је горња оцена у том случају и најбоља.

Последица претходне теореме је следеће тврђење: Ако постоји $\psi \in \mathrm{Sympeo}_0(M, \omega)$ који нема фиксну тачку, тада $\psi \notin \mathrm{Hameo}(M, \omega)$ односно $\mathrm{Hameo}(M, \omega) \subsetneq \mathrm{Sympeo}_0(M, \omega)$. На пример, ротација на торусу даје симплектоморфизам који нема фиксних тачака па на основу последице имамо

$$\mathrm{Hameo}(\mathbb{T}^{2n}, \omega_0) \subsetneq \mathrm{Sympeo}(\mathbb{T}^{2n}, \omega_0).$$

Следећа теорема нам говори да $\mathrm{Hameo}(M, \omega)$, што је и очекивано, садржи све C^1-Хамилтонове дифеоморфизме.

Теорема 3.8 *[18] Нека је $\phi = \phi^1_H$, где је ϕ^t_H ток придружен Хамилтоновој једначини $\frac{d}{dt}\phi^t_H = X_H(t, \phi^t_H)$ за $H \in C^1([0,1] \times M)$. Ако H задовољава*

1. *$||H||_{C^1} < C$, где је $C > 0$ и*

2. *пресликавање $(t, x) \mapsto dH_t(x)$, $[0,1] \times M \to T^*M$ је непрекидно,*

тада је $\phi \in \mathrm{Hameo}(M, \omega)$.

Доказ. Погледати [18]. $\square$

Следи пример Хамилтоновог хомеоморфизма који није C^1.

Пример. Конструисаћемо Хамилтонов хомеоморфизам на јединичном диску D^2 који је непрекидан али не и диференцијабилан и који је једнак идентитету близу руба ∂D^2. Сличан хомеоморфизам можемо да дефинишемо и на било којој површи, тако што изаберемо D унутар Дарбуове карте и продужимо идентитетом на остатак површи. Аналогне примере можемо конструисати и у већим димензијама.
Нека су (r, θ) поларне координате на D^2. Стандардна форма запремине дата је са

$$\Omega = rdr \wedge d\theta$$

Посматрајмо пресликавања $\phi_\rho : D^2 \to D^2$ дата са

$$\phi_\rho : (r, \theta) \mapsto (r, \theta + \rho(r)),$$

где је $\rho : (0, 1] \to [0, \infty)$ глатка функција која за мало $\varepsilon > 0$ задовољава

(1) $\rho' < 0$ на $(0, 1 - \varepsilon)$ и $\rho = 0$ на $[1 - \varepsilon, 1]$

(2) $\lim_{r \to 0^+} r\rho'(r) = -\infty$.

Приметимо да је ϕ_ρ глатко осим у координатном почетку у коме је ϕ_ρ непрекидно али не и глатко. Пресликавање $\phi_{-\rho}$ је инверзно пресликавању ϕ_ρ што показује да је хомеоморфизам. На $D^2 \setminus \{0\}$ важи

$$\phi_\rho^*(rdr \wedge d\theta) = rdr \wedge d\theta,$$

што показује да ϕ_ρ чува површину. Одавде следи да је ϕ_ρ симплектички хомеоморфизам који није симплектоморфизам.
Сада нам је циљ да одаберемо конкретно ρ за које ће ϕ_ρ постати Хамилтонов хомеоморфизам. Посматрајмо изотопију

$$t \in [0, 1] \mapsto \phi_{t\rho} \in \mathrm{Homeo}^\Omega(D^2).$$

Праволинијским рачуном добијамо да је Хамилтонијан дат временски независном функцијом

$$H_\rho(r, \theta) = -\int_1^r s\rho(s)ds.$$

$L^{(1,\infty)}-$норма од H_ρ једнака је

$$\int_0^1 s\rho(s)ds.$$

Изаберимо сада било које ρ за које горњи интеграл конвергира, нпр. $\rho(r) = \frac{1}{\sqrt{r}}$ близу $r = 0$. Нека је ρ_n низ глатких функција регуларних у 0 које теже ка ρ, и нека су ϕ_{ρ_n} одговарајући Хамилтонови дифеоморфизми. Сада добијамо да $\phi_{\rho_n} \to \phi_\rho$ у C^0-топологији, па закључујемо да је ϕ_ρ Хамилтонов хомеоморфизам који није дифеоморфизам. $\square$

Глава 4

C^0−непрекидност спектралне норме

У овом делу (M, ω) ће означавати затворену, повезану и симплектички асферичну симплектичку многострукост. Означимо са $\overline{\mathrm{Ham}}(M, \omega) \subset \mathrm{Homeo}(M)$ затворење групе Хамилтонових дифеоморфизама у C^0−топологији.
Нека су $a, b \in H_*(M) \setminus \{0\}$ две хомолошке класе. За све $\phi \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$ дефинишемо разлику спектралних инваријанти као

$$\gamma(a, b; \phi) := c(a, H) - c(b, H)$$

где је H било који Хамилтонијан који генерише ϕ. Како су спектралне инваријанте за Хамилтонове дифеоморфизме дефинисане до на помак за реалну константу, ова разлика неће зависити од H. Ако одаберемо конкретно $a = [M]$ и $b = [\mathrm{pt}]$, функција

$$\gamma([M], [\mathrm{pt}]; \cdot) : \mathrm{Ham}(M, \omega) \to \mathbb{R}$$

индукује недегенерисану норму на $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ коју називамо *спектралном нормом* и означавамо са $\gamma(\cdot)$. Спектрална норма има следеће особине (за доказ погледати [7]):

1. (Недегенерисаност) $\gamma(\phi) \geq 0$ при чему једнакост важи ако и само ако је $\phi = \mathrm{Id}$,

2. (Ограниченост) $\gamma(\phi) \leq d_{\mathrm{Hofer}}(\phi, \mathrm{Id})$,

3. (Инваријантност) за све $\psi \in \mathrm{Symp}(M, \omega)$ важи $\gamma(\psi\phi\psi^{-1}) = \gamma(\phi)$,

4. (Неједнакост троугла) $\gamma(\phi\psi) \leq \gamma(\phi) + \gamma(\psi)$,

5. (Дуалност) $\gamma(\phi^{-1}) = \gamma(\phi)$,

6. (Енергија-капацитет неједнакост) $\gamma(\phi) \leq 2e(Supp(\phi))$, где је $e(Supp(\phi))$ енергија раздвајања носача од ϕ.

Следећа теорема је централна у овом делу и говори о C^0 непрекидности спектралне норме.

Теорема 4.1 *[16] Нека је (M,ω) затворена, повезана и симплектички асферична. За сваке две класе $a, b \in H_*(M) \setminus \{0\}$ разлика спектралних инваријанти*

$$\gamma(a, b; \cdot) : \mathrm{Ham}(M,\omega) \to \mathbb{R}$$

је непрекидна у односу на C^0-топологију на $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ и продужава се непрекидно на $\overline{\mathrm{Ham}}(M,\omega)$.

4.1 Доказ C^0 непрекидности спектралне норме

Први корак је доказивање слабијег резултата да је спектрална норма C^0 непрекидна за Хамилтонове дифеоморфизме који фиксирају тачке из неког отвореног скупа. Доказ C^0 непрекидности γ добијамо свођењем на тај случај.

Лема 4.2 *Нека је $U \subset M$ отворен и повезан подскуп. Тада, за свако $\varepsilon > 0$, постоји $\delta > 0$ тако да за свако $\phi \in \mathrm{Ham}(M,\omega)$ које задовољава $\phi(x) = x$ за све $x \in U$ и $d_{C^0}(\phi, Id) < \delta$ имамо да важи $\gamma(\phi) < \varepsilon$.*

Доказ. Нека је $F : M \to \mathbb{R}$ Морсова функција која задовољава следеће ствари:

- $\max F - \min F < \varepsilon/2$,
- ϕ_F^1 нема периодичних орбита периода ≤ 1 осим критичних тачака,
- $\mathrm{Crit}(F) \subset U$.

Одавде закључујемо да је $\mathrm{Spec}(F) = \mathrm{CritVal}(F)$, као и да ϕ_F^1 нема фиксних тачака у $M \setminus U$. Одавде следи да постоји $\delta > 0$ тако да за све $x \in M \setminus U$ важи $d(\phi_F^1(x), x) > \delta$.

Ако је $d_{C^0}(\phi, \mathrm{Id}) < \delta$ тада $\phi_F^1 \circ \phi$ неће имати фиксних тачака у $M \setminus U$. Како је ϕ идентитет на U, то је скуп фиксних тачака од $\phi_F^1 \circ \phi$ исти као скуп фиксних тачака од ϕ_F^1, што је заправо скуп критичних тачака функције F, односно важи

$$\mathrm{Fix}(\phi_F^1 \circ \phi) = \mathrm{Crit}(F).$$

Нека је H Хамилтонијан који генерише ϕ, односно $\phi = \phi_H^1$. Свакој фиксној тачки $x \in \mathrm{Fix}(\phi_F^1 \circ \phi)$ можемо да придружимо Хамилтонову орбиту γ_x која се добија надовезивањем константног пута $t \mapsto x = \phi_F^t(x)$ на Хамилтонову орбиту $t \mapsto \phi_H^t(x)$ (напоменимо да иако је $\phi_H^1 = \mathrm{Id}$ на U, то не значи да су орбите $t \mapsto \phi_H^t(x)$ константне за $x \in U$). Тада важи:

$$\mathcal{A}_{F\#H}(\gamma_x) = F(x) + \mathcal{A}_H(\phi_H^t(x)).$$

Како је U путно повезан, из Стоксове теореме и чињенице да је $\phi_H^1 = \mathrm{Id}$ на U, следи да постоји $C \in \mathbb{R}$ тако да за свако $x \in U$ важи $\mathcal{A}_H(\phi_H^t(x)) = C$, односно дејство сваке орбите на U је исто. Другим речима за свако $\alpha \in H_*(M) \setminus \{0\}$ важи $c(\alpha, F\#H) = F(x) + C$ због особине спектралности, па имамо да важи:

$$\gamma(\phi_F^1 \circ \phi) \leq \max F(x) + C - \min F(x) - C < \varepsilon/2.$$

Очигледно важи $\gamma(\phi_F^1) < \max F - \min F < \varepsilon/2$, па неједнакост троугла коначно даје

$$\gamma(\phi) \leq \gamma(\phi_F^{-1}) + \gamma(\phi_F^1 \circ \phi) < \varepsilon.$$

□

Да би смо доказ теореме свели на претходну лему, користићемо помоћно пресликавање:

$$\Phi : M \times M \to M \times M, \quad (x, y) \mapsto (\phi(x), \phi^{-1}(x)),$$

где на $M \times M$ посматрамо симплектичку форму $\omega \oplus \omega$. Пресликавање Φ је такође Хамилтонов дифеоморфизам генерисан Хамилтонијаном $K_t(x, y) = H_t(x) - H_t(\phi_H^t(y))$. Штавише, ако је ϕ C^0-близу идентитета, биће то и Φ. На основу формуле производа за спектралне инваријанте (теорема 5.1 у [20]) имамо да важи $c([M], K) = c([M], H) + c([M], \overline{H}) = \gamma(\phi)$, као и $c([M], \overline{K}) = c([M], \overline{H}) + c([M], H) = \gamma(\phi)$, па је

$$\gamma(\Phi) = 2\gamma(\phi).$$

Лема 4.3 *За све $\varepsilon > 0$, постоји отворена лопта $B \in M$, тако да за све $\varepsilon' > 0$ постоји $\delta > 0$, тако да ако $\phi \in \mathrm{Ham}(M, \omega)$ задовољава $d_{C^0}(\phi, \mathrm{Id}_M) \leq \delta$, можемо да нађемо Хамилтонов дифеоморфизам $\Psi \in \mathrm{Ham}(M \times M, \omega \oplus \omega)$ који задовољава:*

1. $\gamma(\Psi) < \varepsilon$,
2. $d_{C^0}(\Psi, \mathrm{Id}_{M\times M}) < \varepsilon'$,
3. $\Phi \circ \Psi(x, y) = (x, y)$ *за све* $(x, y) \in B \times B$.

Доказ. Нека је $\varepsilon > 0$ и нека је B' отворена лопта у M тако да је енергија раздвајања отвореног скупа $B' \times B'$ у $M \times M$ мања од $\frac{\varepsilon}{4}$.

Став 4.4 *Постоји отворена лопта $B'' \subset B'$ и Хамилтонов дифеоморфизам f у $M \times M$, тако да важи:*

- $f = \phi_F^1$, *где је* $\mathrm{supp} F \subset B' \times B'$,
- *за све* $(x, y) \in B'' \times B''$ *важи* $f(x, y) = (y, x)$.

Доказ става. Коришћењем Дарбуове карте и по потреби смањивањем лопте B' можемо претпоставити да је B' околина 0 у $\mathbb{R}^{2n}$. Како је простор $\mathrm{Sp}(4n, \mathbb{R})$ симплектичких матрица на $\mathbb{R}^{4n} = \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$ путно повезан, можемо изабрати пут таквих матрица $(A^t)_{t\in[0,1]}$ тако да је $A^0 = \mathrm{Id}$ и A^1 линеарно пресликавање $(x, y) \mapsto (y, x)$. Нека је B'' довољно мала лопта око 0, таква да $\cup_{t\in[0,1]} \overline{A^t(B'' \times B'')} \subset B' \times B'$. Нека је $Q_t(x)$ Хамилтонијан који генерише A^t и нека је ρ cut-off функција подржана у $B' \times B'$ која је једнака 1 на скупу $\cup_{t\in[0,1]} \overline{A^t(B'' \times B'')}$. Тада Хамилтонијан $F_t(x) = \rho(x)Q_t(x)$ генерише ток који се поклапа са A^t на $B'' \times B''$ и важи $f = \phi_F^1$. $\square$

За остатак доказа леме одаберимо лопту B'' и Хамилтонов дифеоморфизам f као у горњем ставу. Како је носач од f садржан у $B' \times B'$, неједнакост између енергије и капацитета нам даје $\gamma(f) \leq 2e(B' \times B') \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
Нека је B лопта чије је затворење садржано у B''. Нека је $\Upsilon = \phi \times \mathrm{Id}_M$ и нека је

$$\Psi = \Upsilon^{-1} \circ f^{-1} \circ \Upsilon \circ f.$$

Неједнакост троугла за γ нам даје $\gamma(\Psi) \leq 2\gamma(f) \leq \varepsilon$ чиме смо обезбедили особину 1. из леме. Штавише ако ϕ тежи ка Id_M, тада Ψ тежи ка $\mathrm{Id}_{M\times M}$, што показује особину 2. Коначно, ако је ϕ довољно близу Id_M тако да је $\phi(B) \subset B''$, тада за све $(x,y) \in B \times B$ важи

$$\begin{aligned}\Phi \circ \Psi(x,y) &= \Phi \circ \Upsilon^{-1} \circ f^{-1} \circ \Upsilon \circ f(x,y) \\ &= \Phi \circ \Upsilon^{-1} \circ f^{-1} \circ \Upsilon(y,x) \\ &= \Phi \circ \Upsilon^{-1} \circ f^{-1}(\phi(y),x) \\ &= \Phi \circ \Upsilon^{-1}(x,\phi(y)) \\ &= \Phi(\phi^{-1}(x),\phi(y)) = (x,y).\end{aligned}$$

Дакле, $\Phi \circ \Psi$ се поклапа са идентитетом на $B \times B$, односно задовољена је и особина 3. $\square$

Сада ћемо објаснити како из ове леме следи C^0 непрекидност γ у Id_M. Фиксирајмо $\varepsilon > 0$ и нека је B као у леми. Нека је $\varepsilon' > 0$ и одаберимо δ као у леми. Коначно, нека је ϕ такав да је $d_{C^0}(\phi, \mathrm{Id}_M) < \delta$ и нека је Ψ као у леми. Сада нам неједнакост троугла и особина дуалности дају

$$\gamma(\phi) = \frac{1}{2}\gamma(\Phi) \leq \frac{1}{2}\gamma(\Phi \circ \Psi) + \frac{1}{2}\gamma(\Psi^{-1}) \leq \frac{1}{2}\gamma(\Phi \circ \Psi) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ако су ε' и $d_{C^0}(\phi, \mathrm{Id}_M)$ довољно мали, тада ће $\Phi \circ \Psi$ бити произвољно близу $\mathrm{Id}_{M\times M}$. Ако сада применимо прву лему на отворен скуп $U = B \times B \subset M \times M$ добићемо $\gamma(\Phi \circ \Psi) < \varepsilon$. Сада коначно добијамо $\gamma(\phi) < \varepsilon$, односно γ је непрекидно у Id_M.

За завршетак доказа теореме, требаће нам следећа лема.

Лема 4.5 *За све хомолошке класе $a, b \in H_*(M)$ и све Хамилтонове дифеоморфизме ϕ, ψ важи:*

$$|\gamma(a,b;\phi) - \gamma(a,b;\psi)| \leq \gamma(\psi^{-1} \circ \phi).$$

Доказ. Нека су H и F Хамилтонијани који генеришу ϕ и ψ. Тада неједнакост троугла даје:

$$c(a,H) = c(a \cap [M], F\#(\overline{F}\#H)) \leq c(a,F) + c([M], \overline{F}\#H).$$

Слично је $c(a,F) \leq c(a,H) + c([M], \overline{H}\#F)$. Како је $c([M], \overline{H}\#F) = -c([\mathrm{pt}], \overline{F}\#H)$, закључујемо

$$c(a,F) + c([\mathrm{pt}], \overline{F}\#H) \leq c(a,H) \leq c(a,F) + c([M], \overline{F}\#H)$$

$$c(b,F) + c([\mathrm{pt}], \overline{F}\#H) \leq c(b,H) \leq c(b,F) + c([M], \overline{F}\#H).$$

Одузимањем добијамо

$$(c(a,F) - c(b,F)) - (c([M], \overline{F}\#H) - c([\mathrm{pt}], \overline{F}\#H)) \leq c(a,H) - c(b,H)$$
$$\leq (c(a,F) - c(b,F)) + (c([M], \overline{F}\#H) - c([\mathrm{pt}], \overline{F}\#H)),$$

што можемо да запишемо као

$$|\gamma(a,b;\phi) - \gamma(a,b;\psi)| \leq \gamma(\psi^{-1} \circ \phi).$$

□

Претходна лема нам даје непрекидност функције $\gamma(a,b,\cdot)$ у сваком елементу $\phi \in \mathrm{Ham}(M,\omega)$. Да бисмо доказали да се γ непрекидно продужава на $\overline{\mathrm{Ham}}(M,\omega)$ посматрајмо низ $\phi_i \in \mathrm{Ham}(M,\omega)$ који C^0 конвергира ка ϕ_i. Како је $\overline{\mathrm{Ham}}(M,\omega)$ комплетан у односу на d_{C^0}, то је низ ϕ_i Кошијев. Одатле добијамо да за свако $\delta > 0$ постоји $N \in \mathbb{N}$ тако да за $i,j > N$, важи $d_{C^0}(\phi_i^{-1} \circ \phi_j, \mathrm{Id}_M) < \delta$, па из непрекидности добијамо $\gamma(\phi_i^{-1} \circ \phi_j) < \varepsilon$. Из претходне леме закључујемо да је $\gamma(a,b;\phi_i)$ Кошијев низ у $\mathbb{R}$, па он конвергира. Штавише, ако је ϕ_i' други низ који C^0 конвергира ка ϕ, тада ће $\phi_i^{-1} \circ \phi_i'$ конвергирати ка Id_M у C^0 топологији, па претходна лема даје да су $\gamma(a,b;\phi_i)$ и $\gamma(a,b;\phi_i')$ једнаки.
Коначно, можемо да дефинишемо $\gamma(a,b;\phi)$ као $\lim_{n\to\infty} \gamma(a,b;\phi_n)$ за било који низ $\phi_i \in \mathrm{Ham}(M,\omega)$ који C^0 конвергира ка $\phi \in \overline{\mathrm{Ham}}(M,\omega)$. □

4.2 Последице непрекидности спектралне норме

C^0 непрекидност бар кодова

Нека је дат Хамилтонов дифеоморфизам ϕ, и нека су H, K два Хамилтонијана која генеришу ϕ. Тада је $\mathcal{B}(H) = \mathcal{B}(K)$ у $\widehat{\mathrm{Barcodes}}$, односно добро је дефинисано пресликавање

$$\mathcal{B} : (\mathrm{Ham}(M,\omega), d_{C^0}) \to (\widehat{\mathrm{Barcodes}}, d_{\mathrm{bottle}}).$$

Следећа теорема даје непрекидност овог пресликвања.

Теорема 4.6 *[16] Нека је (M,ω) затворена, повезана и симплектички асферична. Тада је пресликавање*

$$\mathcal{B} : (\mathrm{Ham}(M,\omega), d_{C^0}) \to (\widehat{\mathrm{Barcodes}}, d_{\mathrm{bottle}})$$

непрекидно и продужава се непрекидно на $\overline{\mathrm{Ham}}(M,\omega)$.

Доказ. Кислев и Шелукин су у [19] доказали да за свака два Хамилтонова дифеоморфизма ϕ, ψ важи

$$d_{\mathrm{bottle}}(\mathcal{B}(\phi), \mathcal{B}(\psi)) \leq \frac{1}{2}\gamma(\psi^{-1} \circ \phi).$$

Резултат сада директно следи из C^0 непрекидности γ и претходне неједнакости. □

Напомена. Треба нагласити да је неопходно да посматрамо простор бар кодова до на помак за реалну константу $\widehat{\mathrm{Barcodes}}$. Могуће је дефинисати пресликавање $\mathcal{B}$ које узима вредности у простору бар кодова Barcodes, али онда непрекидност неће више важити.

Проблем измештања диска

Проблем измештања диска пита да ли је могуће C^0-малим Хамилтоновим хомеоморфизмом изместити *велику* симплектичку лопту. Показаћемо да је одговор негативан на свим симплектички асферичним многострукостима.
Под симплектичком лоптом подразумевамо симплектичко улагање $i : (B, \omega_0) \to (M, \omega)$, где је (B, ω_0) затворена лопта у $\mathbb{R}^{2n}$ а ω_0 стандардна симплектичка форма. Кажемо да је симплектичка лопта полупречника r ако је B полупречника r.

Теорема 4.7 *[16] Нека је (M,ω) затворена, повезана и симплектички асферична. За свако $r > 0$, постоји $\varepsilon > 0$ са следећом особином: ако $\phi \in \overline{\mathrm{Ham}}(M,\omega)$ измешта симплектички уложену лопту полупречика r, онда је $d_{C^0}(\mathrm{Id}, \phi) > \varepsilon$.*

Доказ. Доказ је директна последица теореме о непрекидности. Спектрална норма γ непрекидно продужује на $\overline{\mathrm{Ham}}(M,\omega)$ и наставља да задовољава све наведене особине. Конкретно, ако $\phi \in \overline{\mathrm{Ham}}(M,\omega)$ измешта симплектички уложену лопту полупречника r, тада је $\pi r^2 \leq \gamma(\phi)$. Одатле из непрекидности γ и чињенице да је $\gamma(\mathrm{Id}) = 0$ следи да постоји $\varepsilon > 0$, које зависи само од r, такво да важи $d_{C^0}(\mathrm{Id}, \phi) \geq \varepsilon$. □

Теорема нам говори да Хамилтонови хомеоморфизми који су C^0-мали не могу да изместе велике скупове. Ово можемо да интерпретирамо као C^0 верзију неједнакости између енергије и капацитета.

Примена у Хоферовој геометрији

Ле Ру је поставио следеће питање: За $A > 0$ означимо са E_A комплемент затворене лопте полупречника A у Хоферовој метрици, односно нека је $E_A := \{\phi \in \mathrm{Ham}(M,\omega) \mid d_{\mathrm{Hofer}}(\mathrm{Id},\phi) > A\}$. Да ли E_A има непразну C^0 унутрашњост за све $A > 0$? Одговор за одређену класу симплектичких многострукости је дат у следећој теореми.

Теорема 4.8 *[16] Нека је (M,ω) затворена, повезана и симплектички асферична. Ако је γ норма неограничена на (M,ω), тада скуп E_A има непразну C^0-унутрашњост.*

Доказ. Узмимо $\phi \in \mathrm{Ham}(M,\omega)$ за које је $\gamma(\phi) > A$. Како је γ C^0-непрекидно, то ће постојати C^0-отворена околина $\mathcal{V}$ од ϕ, тако да је $\gamma > A$ на $\mathcal{V}$. Дакле, V је садржано у унутрашњости од E_A. $\square$

Очекивано је али не и доказано да је γ неограничена на свим симплектички асферичним многострукостима. Зна се да је γ неограничена на производима облика $(\Sigma,\omega_1) \times (N,\omega_2)$, где је Σ затворена површ која није сфера.

Треба напоменути да је на великој класи симплектичких многострукости одговор на горње питање негативан, односно постоје Хамилтонови дифеоморфизми који су произвољно C^0-мали али имају велику Хоферову норму.

Глава 5

Коизотропна ригидност

Подмногострукост C симплектичке многострукости (M, ω) називамо *коизотропном* ако за сваку тачку $p \in C$ важи $(T_pC)^\omega \subset T_pC$, где је $(T_pC)^\omega$ симплектички ортогонал. На пример Лагранжеве подмногострукости и хиперповрши су коизотропне.

Нека су сада $X, Y \in (TC)^\omega$ и $Z \in TC$. Коришћењем Фробенијусове теореме и следећег идентитета

$0 = d\omega(X, Y, Z) =$

$= X\omega(Y, Z) + Y\omega(Z, X) + Z\omega(X, Y) + \omega([Y, Z], X) + \omega([Z, X], Y) + \omega([X, Y], Z) =$

$= \omega([X, Y], Z)$

закључујемо да коизотропне подмногострукости дефинишу интеграбилну дистрибуцију $(TC)^\omega$, чију карактеристичну фолијацију означавамо са $\mathcal{F}$. У овом делу показаћемо да су коизотропне подмногострукости заједно са њиховим карактеристичним фолијацијама C^0-ригидне.

Теорема 5.1 *[23] Нека је C глатка коизотропна подмногострукост симплектичке многострукости (M, ω). Нека је U отворен подскуп од M и нека је $\theta : U \to V$ симплектички хомеоморфизам. Ако је $\theta(C \cap U)$ глатка подмногострукост, онда је она коизотропна. Штавише, θ шаље карактеристичну фолијацију од $C \cap U$ у карактеристичну фолијацију од $\theta(C \cap U)$.*

Битна особина претходне теореме је њена локалност, односно C не мора обавезно бити затворена и θ не мора обавезно бити глобално дефинисана.

Лагранжеве подмногострукости су екстреман случај коизотропних. Када је C Лагранжева, њена карактеристична фолијација се састоји само из једног листа

C и тада теорема гласи: *Ако је θ симплектички хомеоморфизам и ако је $\theta(C)$ глатка, онда је $\theta(C)$ Лагранжева.*
Такође треба нагласити да је ова теорема коизотропно уопштење Громов-Ељашбергове теореме, јер имплицира да ако је график симплектичког хомеоморфизма глатка подмногострукост у $M \times M$ онда је и Лагранжева.

Ми ћемо изложити доказ теореме у специјалном случају када је $M = T^*L$ и $\omega = d\lambda$, где је L затворена и λ Луивилова $1-$форма. Овај случај садржи главне идеје доказа, али је технички једноставнији.

Теорема 5.2 *[23] Нека је L_0 нулто сечење у T^*L и θ симплектички хомеоморфизам. Ако је $\theta(L_0)$ глатка, онда је Лагранжева.*

За доказ теореме биће нам потребна динамичка карактеризација коизотропних подмногострукости, као и следећа теорема.

Теорема 5.3 *[23] Нека је $H \in C^0_{\mathrm{Ham}}(T^*L)$ са индукованом хамеотопијом ϕ^t_H. Тада је рестрикција H на L_0 функција времена ако и само ако ϕ^t_H чува L_0.*

Следећа лема представља карактеризацију коизотропних подмногострукости.

Лема 5.4 *Нека је C глатка подмногострукост симплектичке многострукости (M, ω). Следећи искази су еквивалентни:*

- *C је коизотропна,*
- *За сваки гладак Хамилтонијан H, ако је $H|_C$ функција времена, онда $\phi^t_H(C) = C$.*

Доказ Теореме 6.2. Нека је H било који гладак Хамилтонијан чија је рестрикција на $\theta(L_0)$ функција времена. Тада је $H \circ \theta \in C^0_{\mathrm{Ham}}$ и рестрикција $H \circ \theta$ на L_0 је функција времена. Из теореме 6.3 следи да ток од $H \circ \theta$ чува L_0, односно $\theta^{-1}\phi^t_H\theta(L_0) = L_0$, одакле добијамо да ток од H чува $\theta(L_0)$. Сада из леме следи да је $\theta(L_0)$ коизотропна, а због димензије добијамо да је $\theta(L_0)$ Лагранжева. $\square$

Пре него што пређемо на доказ Теореме 5.2, наводимо став који ћемо користити у доказу.

Став 5.5 *[23] Нека је L затворена многострукост и $\{H_k\}_k$ низ глатких униформно компактно подржаних Хамилтонијана на T^*L (што значи да постоји компакт K такав да је $\cup_k \mathrm{supp}(H_k) \subset K$) за које важи*

(1) за све $t \in [0,1]$, $\gamma_L(\phi^t_{H_k}) \to 0$,

(2) $\{H_k\}_k$ униформно конвергира ка непрекидној функцији H.

Тада је рестрикција H на L_0 функција времена.

Доказ Теореме 6.3. $\boxed{\Rightarrow}$ за доказ директне импликације претпоставимо да је $H_t|_{L_0} = c(t)$ функција времена. Претпоставимо супротно, да ϕ_H не чува L_0, односно да постоји t_0 за које је $\phi^{t_0}_H(L_0) \not\subset L_0$. Након временске репараметризације $t \mapsto t_0 t$ можемо претпоставити да је $t_0 = 1$, односно $\phi^1_H(L_0) \not\subset L_0$.
Како је $H \in C^0_{\mathrm{Ham}}$, то постоји низ глатких Хамилтонијана $H_i : [0,1] \times M \to \mathbb{R}$ таквих да H_i униформно конвергира ка H и ϕ_{H_i} конвергира ка ϕ_H у C^0-топологији.
Како је $\phi^1_H(L_0) \not\subset L_0$, то постоји лопта B таква да је $B \cap L_0 \neq \emptyset$ и $\phi^1_H(\overline{B}) \cap L_0 = \emptyset$. Одатле следи да за довољно велико i важи $\phi^1_{H_i}(B) \cap L_0 = \emptyset$, па на основу неједнакости између спектралне норме и капацитета добијамо

$$\gamma(\phi^1_{H_i}) \geq c_{\mathrm{LR}}(B; L_0) > 0.$$

Са друге стране знамо да је спектрална норма одоздо ограничена са Лагранжевом Хоферовом нормом, односно важи

$$\gamma(\phi^1_{H_i}) \leq \int_0^1 (\max_{L_0} H_i(t,\cdot) - \min_{L_0} H_i(t,\cdot))dt,$$

што је у контрадикцији са претпоставком да је $H|_{L_0}$ функција времена и претходном неједнакошћу са капацитетом. Дакле ϕ_H мора да чува L_0.
$\boxed{\Leftarrow}$ за доказ обрнуте импликације претпоставимо да ϕ_H чува L_0. Показаћемо да је функција $H(0,\cdot)|_{L_0}$ константна на M. То је и довољно показати јер репараметризацијом $\hat{H}(t,x) = (1-s)H(s+(1-s)t, x)$ добијамо да је $H(s,\cdot)|_{L_0}$ константна на M, што заправо значи да је $H|_{L_0}$ функција времена.
Нека је B отворена лопта која сече L_0 и U отворена околина од $\overline{B}$, таква да скуп $L_0 \setminus \pi(U)$ има непразну унутрашњост, где је $\pi : T^*L \to L_0$ природна пројекција (овакво U бирамо да би смо могли да применимо лему 3.11).

Нека је ψ било који симплектоморфизам чији је носач садржан у B и који чува L_0. Нека је $\varepsilon > 0$ такво да важи $\phi_H^t(B), (\phi_H^t)^{-1} \Subset U$ за све $t \in [0, \varepsilon]$ (ознака $\Subset$ означава да је подскуп компактно садржан). Након временске репараметризације у којој $H(t, x)$ заменимо са $\varepsilon H(\varepsilon t, x)$ можемо претпоставити да важи:

$$(\forall t \in [0,1]) \quad \phi_H^t(B), \left(\phi_H^t\right)^{-1} \Subset U.$$

Да бисмо проблем локализовали на U, посматрајмо следећу Хамеотопију

$$\left(\phi_H^t\right)^{-1} \psi^{-1} \phi_H^t \psi \in \mathrm{Hameo}(T^*L, d\lambda),$$

која је генерисана са $G \in C^0_{\mathrm{Ham}}$ датим са

$$G = (H \circ \psi - H) \circ \phi_H.$$

Доказаћемо да је $G|_{L_0} = 0$. Носач од од G је садржан у U, а како ψ и ϕ_H чувају L_0 закључујемо да ток од G такође чува L_0.
Како је $H \in C^0_{\mathrm{Ham}}$, то постоји низ Хамилтонијана $\{H_i\}$ који униформно конвергирају ка H и $\{\phi_{H_i}\}$ конвергира ка ϕ_H. Ако дефинишемо $G_i = (H_i \circ \psi - H_i) \circ \phi_{H_i}$, његов носач ће бити садржан у U за довољно велико i. Такође низ G_i униформно тежи ка G и $\{\phi_{G_i}\}$ тежи ка ϕ_G.
Фиксирајмо мало $r > 0$. Како је $\phi_G^t(L_0) = L_0$ за све $t \in [0,1]$, то ће за довољно велико i бити $\phi_{G_i}^t(L_0) \subset T_r^* L$. Како су додатно сви Хамилтонијани подржани у U, можемо да применимо лему 3.11. и закључимо да је $\gamma_L(\phi_{G_i}^1) \leq Cr$, односно $\gamma_L(\phi_{G_i}^1) \to 0$ ако пустимо $r \to 0$. Наравно, исто важи и за било које $t \in [0,1]$, односно $\gamma(\phi_{G_i}^t) \to 0$ за $t \in [0,1]$. Сада можемо да применимо став 6.5 који нам каже да је $G|_{L_0} = c(t)$. Како је носач од G садржан у U, закључујемо да је $G|_{L_0} = 0$.
Специјално, $G|_{L_0} = 0$ за $t = 0$, одакле следи да је $H(0, \psi(x)) = H(0, x)$ за свее $x \in L_0$. Симплектоморфизам ψ можемо да одаберемо тако да за било које две тачке $x_1, x_2 \in B \cap L_0$ важи $\psi(x_1) = x_2$, одакле добијамо да је $H(0, \cdot)|_{B \cap L_0} = const$, одакле варирањем лопти B добијамо да је $H(0, \cdot)|_{L_0} = const$. □

5.1 Дефинисање C^0 коизотропних подмногострукости

У овом делу ћемо користити теорему о коизотропнij ригидности да би смо дефинисали C^0-коизотропне подмногоструости. Може да се покаже да је свака коизотропна подмногострукост кодимензије k локално симплектоморфна са

$$\mathcal{C}_0 = \{(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) \mid (y_{n-k+1}, \dots, y_n) = (0, \dots, 0)\} \subset \mathbb{R}^{2n},$$

Дефиниција 5.6 *Тополошка подмногострукост C симплектичке многострукости (M, ω) је C^0-коизотропна ако око сваке тачке $p \in C$ постоји C^0-коизотропна карта, односно постоји пар (U, θ) где је U отворена околина тачке p и $\theta : U \to V \subset \mathbb{R}^{2n}$ симплектички хомеоморфизам такав да је $\theta(C \cap U) = \mathcal{C}_0 \cap V$. C^0-коизотропну подмногострукост кодимензије n називамо C^0-Лагранжевом.*

Теорема 6.1. нам гарантује да су глатке C^0-коизотропне подмногострукости коизотропне.

Пример. Графици симплектичких хомеоморфизма у $M \times M$ су C^0-Лагранжеве подмногострукости као и графици диференцијала C^1 форми у T^*M.

Глава 6

Арнолдова Хипотеза и Хамеоморфзми

Хипотеза (Арнолд). *Хамилтонов дифеоморфизам на симплектичкој многострукости* (M, ω) *има бар онолико фиксних тачака колики је и минималан број критичних тачака глатке функције на* M.

Значај ове хипотезе је чињеница да предвиђа велики број фиксних тачака, што се може схватити као манифестација симплектичке ригидности. За произвољан дифеоморфизам не можемо да предвидимо постојање више од једне фиксне тачке.
Арнолдова хипотеза је била од великог значаја за развој симплектичке топологије и послужила је као мотивација за конструкцију Флорове хомологије. Наводимо још једну верзију Арнолдове хипотезе: *Сваки недегенерисан Хамилтонов дифеоморфизам затворене симплектичке многострукости* M *има бар онолико фиксних тачака колико и збир Бетијевих бројева многострукости* M.

Дефиниција 6.1 *Кохомолошка дужина* $\mathrm{cl}(M)$ *путно повезаног и компактног тополошког простора* X *је максималан број* k *за који постоји* k *кохомолошких класа позитивног степена* $a_1, \ldots, a_k \in H^*(X; R)$ *таквих да је* $a_1 \cup \ldots \cup a_k \neq 0$.

Класична Љуштерник-Шнирелманова теорија даје доње ограничење за број фиксних тачака глатке (не обавезно Морсове) функције на M. Тачније она показује да је минималан број критичних тачака глатке функције на M увек већи од кохомолошке дужине $\mathrm{cl}(M)$. Дакле, природна интерпретација Арнолдове хипотезе, звана *хомолошка Арнолдова хипотеза*, гласи: *Хамилтонов дифеоморфизам на* (M, ω) *има бар* $\mathrm{cl}(M)$ *фиксних тачака.* За симплектичку многострукост димензије $2n$, $n-$ти степен кохомолошке класе симплектичке форме је различит од 0, тако да је $\mathrm{cl}(M) \geq n+1$.

6.1 C^0 контрапример Арнолдове хипотезе

Након што смо дали дефиницију Хамилтонових хомеоморфизама, званих Хамеоморфизми, природно је питање да ли Арнолдова хипотеза наставља да важи и за њих. У случају затворених површи, Мацумото је доказао да (слаби) Хамилтонови хомеоморфизми задовољавају Арнолдову хипотезу. Још један доказ је дао Ле Калвез коришћењем теорије трансверзалних фолијација, међутим ниједна од тих техника се не уопштава на веће димензије. Да нада за таквим уопштењем не постоји показали су Лев Буховски, Винсент Умилиер и Собхан Сејфадини:

Теорема 6.2 *[21] Нека је* (M, ω) *затворена и повезана симплектичка многострукост димензије бар* 4*. Тада постоји Хамилтонов хомеоморфизам* $f \in \mathrm{Hameo}(M, \omega)$ *са тачно једном фиксном тачком. Штавише* f *можемо одабрати тако да задовољава било који од следећа два услова.*

1. *Нека је* $\mathcal{H}$ *нормална подгрупа од* $\mathrm{Sympeo}(M, \omega)$ *која садржи* $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ *као прави подскуп. Тада,* $f \in \mathcal{H}$*.*

2. *Означимо са* p *јединствену фиксну тачку од* f*. Тада је* f *симплектички дифеоморфизам на* $M \setminus \{p\}$*.*

Прва ствар коју треба напоменути је да сваки Хамилтонов хомеоморфизам има бар једну фиксну тачку. Претпоставимо супротно, да постоји $f \in \mathrm{Hameo}(M, \omega)$ који нема фиксних тачака. Тада је $\min_{x \in M} d(f(x), x) = d_{\min} > 0$. Напишимо f као C^0 лимес Хамилтонових дифеоморфизама f_i, од којих сваки има бар једну фиксну тачку x_i. Тада је $d_{C^0}(f, f_i) \geq d(f(x_i), f_i(x_i)) = d(f(x_i), x_i) > d_{\min}$ па након пуштања лимеса добијамо контрадикцију.

Друга ствар коју треба напоменути је да не постоји нада за алтернативном дефиницијом Хамилтонових хомеоморфизама који ће задовољавати Арнолдову хипотезу. Како је $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ нормална подгрупа од $\mathrm{Symp}(M, \omega)$, потпуно је природно очекивати да алтернативна дефиниција групе Хамилтонових хомеоморфизама садржи $\mathrm{Ham}(M, \omega)$ као подгрупу и буде нормална подгрупа од $\mathrm{Sympeo}(M, \omega)$. Дакле, прва особина претходне теореме нам говори да нема наде за алтернативном дефиницијом Хамеоморфизама који ће задовољавати Арнолдову хипотезу.

6.2 Кратак опис конструкције контрапримера

Конструкција одговарајућег хомеоморфизма f се врши у два велика корака. Први и тежи корак је описан леми која следи одмах након дефиниције.

Дефиниција 6.3 *Компактан подскуп T глатке многострукости M је уложено стабло ако постоји коначно планарно стабло T_0 и непрекидно инјективно пресликавање $\chi : T_0 \to M$, тако да је $\chi(T_0) = T$ и пресликавање χ је глатко улагање унутрашњости сваке ивице стабла T_0.*

Лема 6.4 *[21] Нека је (M, ω) затворена и повезана симплектичa многострукост димензије бар 4. Постоји Хамилтонов хомеоморфизам $\psi \in \mathrm{Hameo}(M, \omega)$ и непрекидно уложено стабло $T \subset M$ тако да важи*

1. *T је инваријантно у односу на ψ, тј. $\psi(T) = T$,*

2. *Све фиксне тачке од ψ су садржане у T.*

3. *ψ је глатко на комплементу од T.*

Битан став у конструкцији инваријантног стабла T је квантитативни $h-$принцип који су увели Буховски и Општејн, у чијем је доказу неопходна претпоставка о димензији бар 4. Идеја доказа леме је да кренемо од C^2-мале Морсове функције H, чији одговарајући Хамилтонов дифеоморфизам ϕ_H^1 има коначно фиксних тачака које одговарају критичним тачкама функције H. За две такве тачке x_1 и y_1 конструишемо затворену криву γ_1, која повезује x_1 и y_1, и Хамилтонов хомеоморфизам ψ_1 који је C^0 близу идентитета, такав да $\mathrm{Fix}(\psi_1 \phi_H^1) = \mathrm{Fix}(\phi_H^1)$ и γ_1 је инваријантно при $\psi_1 \phi_H^1$. Конструкцију поновимо довољно пута, тако да добијемо криве $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_N$ чија унија чини тражено стабло T. Хомеоморфизам ψ онда добијамо као композицију $\psi = \psi_N \circ \cdots \circ \psi_1 \circ \phi_H^1$.

Други корак се састоји у „сабијању” инваријантног стабла T у једну тачку која ће уједно бити и фиксна тачка хомеоморфизма f. То радимо тако што фиксирајмо тачку $p \in M$ и конструишемо низ симплектоморфизама $\phi_i \in \mathrm{Symp}(M, \omega)$ који C^0 конвергирају ка пресликавању $\phi : M \to M$ које има следеће особине:

1. $\phi(T) = \{p\}$,

2. $\phi|_{M \setminus T} : M \setminus T \to M \setminus \{p\}$ је симплектоморфизам.

Приметимо да из прве особине следи да ϕ није инјективно, тако да ϕ_i^{-1} није конвергентан низ. Сада дефинишемо $f : M \to M$ на следећи начин:

$$f(x) = \begin{cases} p, & x = p \\ \phi\psi\phi^{-1}(x), & x \neq p \end{cases}$$

Како је пресликавање $f|_{M\setminus\{p\}}$ конјуговано пресликавању $\psi : M \setminus M \setminus T \to M \setminus T$ које нема фиксних тачака, закључујемо да је p заиста једина фиксна тачка пресликавања f.
Пажљивим одабиром низа симплектоморфизама ϕ_i можемо осигурати да низ конјугованих пресликавања $\phi_i \psi \phi_i^{-1}$ C^0 конвергира ка f захваљујући инваријантности стабла T. Међутим доказ да је f Хамилтонов хомеоморфизам захтева још додатног посла.

6.3 Покушај спасавања Арнолдове хипотезе за хомеоморфизме

У овом делу ћемо покушати да објаснимо како је могуће уз помоћ симплектичких спектралних инваријанти добити резултате који се могу интерпретирати као варијанта Арнолдове хипотезе за Хамилтонове хомеоморфизме.

Нека је (M, ω) затворена, симплектички асферична многострукост. За почетак приметимо да због Липшицове непрекидности спектралних инваријанти у односу на Хоферову норму можемо да дефинишемо спектралне инваријанте и за непрекидне Хамилтонијане:

Дефиниција 6.5 *За $\alpha \in H_*(M) \setminus \{0\}$ и непрекидан Хамилтонијан H, дефинишемо*

$$c(\alpha, H) = \lim_{t \to +\infty} c(\alpha, H_i),$$

где је H_i било који низ глатких Хамилтонијана који конвергирају ка H.

У овом случају није познато да ли $c(\alpha, H)$ зависи само од ϕ_H^1 (за разлику од глатког случаја), осим у случају површи где је одговор потврдан.

Означимо са f конструисан Хамилтонов хомеоморфизам који има тачно једну фиксну тачку и представља контрапример за C^0-Арнолдову хипотезу. Испоставља се да су аутори конструисали f тако да буде веома близу Хамилтоновог дифеоморфизма ϕ_H^1 за C^2-малу Морсову функцију H, чије спектралне инваријанте у том случају одговарају хомолошким минимакс селекторима $\rho(\alpha, \cdot)$. Дакле, иако конструисан хамеоморфизам има једну фиксну тачку, он има много различитих спектралних инваријанти. Видећемо ускоро да то није случајност, већ правило.
Следећи став следи из класичне Љуштеник-Шнирелманове теорије.

Став 6.6 *[21] Нека је f глатка функција на затвореној многострукости V. Ако је број различитих хомолошких минимакс селектора функције f мањи од* $\mathrm{cl}(V)$, *онда је број критичних тачака функције f бесконачан.*

Из овог става следи да конструисан контрапример има бар $\mathrm{cl}(M)$ различитих спектралних инваријанти. Природно је питати се да ли је то случај само са конкретним контрапримером, или је у питању општи феномен.

Теорема 6.7 *[21] Нека је (M, ω) затворена и симплектички асферична многострукост. Претпоставимо да је $\phi \in \mathrm{Hameo}(M, \omega)$ Хамеоморфизам генерисан непрекидним Хамилтонијаном H. Ако је број различитих спектралних инваријанти функције H мањи од $\mathrm{cl}(M)$, тада је скуп фиксних тачака хомеоморфизма ϕ бесконачан.*

Доказ. Погледати [21]. □

Ова теорема показује да је Арнолдова хипотеза за Хамилтонове хомеоморфизме тачна уколико уз фиксне тачке бројимо и различите спектралне инваријанте.

Литература

[1] D. McDuff, D. Salamon - *Introduction to symplectic topology*, 2nd ed., Oxford Sci. Pub. 1998.

[2] D. McDuff, D. Salamon - *J-Holomorphic Curves and Symplectic Topology*, American Mathematical Society; 2 edition (2012)

[3] J. Robbin, D. Salamon - *The Maslov index for paths.* Topology Vol. 32, No. 4, pp. 827-844. 1993.

[4] S. Piunikhin, D. Salamon, M. Schwarz - *Symplectic Floer-Donaldson theory and quantum cohomology.* Contact and Symplectic Geometry, Publ. Newton Instit. 8, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1996, pp. 171200.

[5] C. Viterbo - *Symplectic topology and Hamilton-Jacobi equations* NATO Science Series II: Mathematics, Physics and Chemistry, vol 217. Springer, Dordrecht

[6] Y. G. Oh - *Symplectic topology as the geometry of action functional*J. Differential Geom. Volume 46, Number 3 (1997), 499-577.

[7] M. Schwarz - *On the action spectrum for closed symplectically aspherical manifolds.* Pacific J. Math., 193(2):419461, 2000.

[8] A. Monzner, N. Vichery, F. Zapolsky - *Partial quasimorphisms and quasistates on cotangent bundles, and symplectic homogenization.* J. Mod. Dyn., 6(2):205249, 2012.

[9] C. Viterbo - *Symplectic topology as the geometry of generating functions.* Math. Annalen, 292:685710, 1992.

[10] Y. G. Oh - *Geometry of generating functions and Lagrangian spectral invariants.* ArXiv:1206.4788, June 2012.

[11] H. Hofer, E. Zehnder - *Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics.* Birkhauser Advanced Texts: Basler Lehrbucher. [Birkhauser Advanced Texts: Basel Textbooks]. Birkhauser Verlag, Basel, 1994.

[12] S. Lisi, A. Rieser - *Coisotropic Hofer-Zehnder capacities and non-squeezing for relative embeddings.* ArXiv:1312.7334, 2013.

[13] M. Usher - *The sharp energy-capacity inequality.* Commun. Contemp. Math., 12(3):457-473, 2010.

[14] L. Polterovich, E. Shelukhin - *Autonomous Hamiltonian flows, Hofers geometry and persistence modules.* Selecta Math. (N.S.), 22(1):227296, 2016.

[15] C. Viterbo - *On the uniqueness of generating Hamiltonian for continuous limits of Hamiltonians flows.* Int. Math. Res. Not., pages Art. ID 34028, 9, 2006.

[16] V. Humiliere, R. Leclercq, S. Seyfaddini - *Coisotropic rigidity and C^0-symplectic geometry.* Duke Math. J., 164(4):767-799, 2015.

[17] W. Crawley-Boevey - *Decomposition of pointwise finite-dimensional persistence modules.* J. Algebra Appl., 14(5):1550066, 8, 2015.

[18] Y. G. Oh, S. Muller - *The group of Hamiltonian homeomorphisms and C^0-symplectic topology.* J. Symplectic Geom., 5(2):167-219, 2007.

[19] A. Kislev, E. Shelukhin - *Bounds on spectral norm and barcodes.* ArXiv:1810.09865, 2018.

[20] M. Entov, L. Polterovich - *Rigid subsets of symplectic manifolds.* Compos. Math., 145(3):773826, 2009.

[21] L. Buhovsky, V. Humiliere, S. Seyfaddini - *A C^0 counterexample to the Arnold conjecture.* Invent. math. (2018) 213: 759.

[22] L. Buhovsky, M. Entov, L. Polterovich - *Poisson brackets and symplectic invariants.* Selecta Math. (N.S.), 18(1):89-157, 2012.

[23] V. Humiliere, R. Leclercq, S. Seyfaddini - *Coisotropic rigidity and C^0-symplectic geometry.* Duke Math. J., 164(4):767-799, 2015.

[24] V. Humiliere, R. Leclercq, S. Seyfaddini - *New energy-capacity-type inequalities and uniqueness of continuous Hamiltonians.* Comment. Math. Helv., 90(1):1-21, 2015.

[25] V. Humiliere, R. Leclercq, S. Seyfaddini - *Reduction of symplectic homeomorphisms.* Ann. Sci. Ec. Norm. Super. (4), 49(3):633-668, 2016.