МИНИ КУРС О СИМПЛЕКТИЧКИМ МНОГОСТРУКОСТИМА

Дарко Милинковић

ГТА забавиште, зимски семестар 2001.

Садржај

1 Циљ, намена и домет текста

Овај летак је намењен полазницима ГТА забавишта, ради пропагирања, подстицања и ширења симплектичког погледа на математику.[1] Може се користити као извор забаве или информација и не претендује на систематичност или потпуност.

2 Приступ

ГТА семинар негује традицију „учења осмозом ($\dot{\omega}\sigma\mu\acute{o}\varsigma, \dot{\omega}\vartheta\acute{\varepsilon}\omega$)". Трудићемо се да у овим белешкама следимо тај дух. Тиме одустајемо од сваког покушаја да све дефинишемо, докажемо и разумемо **одмах**; уместо тога, трудимо се да се изложимо што већем броју примера и задатака („повећање осмозног притиска"), непоколебљиво верујући да разумевање које није откривање није разумевање. Главни део текста су задаци, има их 100. Многи од њих су решени на курсу. Тако остајемо привржени лаичкој философији образовања: „Познавање природе и друштва се учи, из српског се пишу састави, а из математике раде задаци". Без сумње, многима се овај приступ неће допасти; њих охрабрујемо да одложе текст и да му се врате кад буду боље воље и кад им при руци буде оловка.[2] Неки задаци су можда мало тежи за прво читање о симплектичким многострукостима и треба им се враћати више пута, али се тај труд исплати.[3] Крај задатка обележен је једним од симбола $\spadesuit$, $\diamondsuit$, $\heartsuit$, $\clubsuit$, у зависности од тежине. $\spadesuit$ су задаци који циљају само на то да пробуде заспалог читаоца, $\diamondsuit$-задаци захтевају од читаоца да се маши оловке, $\heartsuit$ подразумева бар мали губитак времена, док за $\clubsuit$ треба размислити, ос-

[1] „In recent years, symplectic and contact geometries have encroached on all areas of mathematics. As each skylark must display its comb, so every branch of mathematics must finally display symplectisation. In mathematics there exist operations on different levels: functions acting on numbers, operators acting on functions, functors acting on operators, and so on. Symplectisation belongs to the small set of highest level operations acting not on details (functions, operators, functors), but on all mathematics at once. Although some such highest level operations are presently known (for example, algebraisation, Bourbakisation, complexification, superisation, symplectisation), there is as yet no axiomatic theory describing them." (V. I. Arnold, *Catastrophe theory* (3rd ed.), Springer – Verlag, New York 1992)

[2] „Knowledge is seldom lacking in the degree that will is lacking." (Ezra Pound, *Guide to Kulchur*)

[3] „Ни малом Јожи у почетку није било лако. Учење му није ишло од руке. [...] И тако је Јожа морао да понавља први разред. Али само први и ниједан више." (Франце Бевк, *Књига о Титу)*

врнути се око себе и, можда, отворити и прелистати неку књигу. Будући да се ради о предавањима у забавишту, нема задатака *бетл* и *санс*.

3 Шта значи „симплектичка"?

Желећи да избегне могућност забуне при називању различитих објеката истим именом, Херман Вејл[4] је уместо речи *комплексан*, латинског корена (од cum - са, заједно; complexus - обухват, загрљај, наручје) употребио реч *симплектички*, заменивши латински корен грчким ($\varsigma\nu\mu\pi\lambda\acute{\varepsilon}\kappa\omega$ – сплести, заклопити, савити, свезати, заплести се, сукобити се, $\varsigma\nu\mu\pi\lambda\varepsilon\kappa\tau\iota\kappa\acute{o}\varsigma$ – заједно уплићући) за нову структуру која се појавила.

4 Шта је „симплектичка геометрија"?

Симплектичка форма на глаткој многострукости је недегенерисана[5] затворена[6] 2-форма на M. Многострукост са таквом формом зове се симплектичка.

Задатак 1. Доказати да је $\dim M = 2n$ или ∞. ♠

Задатак 2. Доказати да је ω недегенерисана ако и само ако је $\omega^{\wedge n} \neq 0$. Последица: симплектичка многострукост је оријентисана. ♢

Задатак 3. $TM \to T^*M$, $X \mapsto i(X)\omega$ је бијекција.[7] ♠

5 Шта је „симплектичка топологија"?

Симплектичке многострукости немају локалне инваријанте (в. Задатак 14) и могу се разликовати само као глобални (тј. тополошки) објекти.[8] Њи-

[4] H. Weyl, *The Classical Groups, Their Invariants and Representation,* Princeton University Press, 1946.

[5] $(\forall X)(\exists Y)\omega(X,Y) \neq 0$

[6] $d\omega = 0$

[7] $i(X)\alpha$ је $k-1$ форма дефинисана са $i(X)\alpha(Y_1,\dots Y_{k-1}) := \alpha(X, Y_1, \dots Y_{k-1})$; $i(X)$ је антидеривација, тј. $i(X) \circ i(X) = 0$, $i(X)(\alpha \wedge \beta) = i(X)\alpha\beta + (-1)^{\deg \alpha} i(X)\beta$ и назива се унутрашње множење или унутрашње диференцирање.

[8] За разлику од Риманових многострукости, које се локално разликују, нпр. сфера и раван се локално разликују као Риманове многострукости јер сфера има позитивну кривину, док је кривина равни нула.

хова геометријска структура условљава њихову топологију, што илуструје и следећи задатак.

Задатак 4. Нека је M затворена (= компактна и без границе) симплектичка многострукост. Доказати да су кохомолошке групе $H^{2k}_{DR}(M)$, $k = 0, 1, \cdots, n$, нетривијалне. $\diamondsuit$

Одавде следи да постоје многострукости које не допуштају симплектичку структуру. Али то не значи да постоје многострукости које су недоступне симплектичким методама – над сваком многострукошћу лебди симплектичка структура (в. пример испред Задатка 5).

6 Примери симплектичких многострукости

- $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$, $\omega_0 = \sum dp_i \wedge dq_i$.
- Комплексне подмногострукости[9] у $\mathbb{C}^n$.
- Оријентисане површи.
- Котангентна раслојења.
  Нека је M произвољна многострукост и $T^*M \xrightarrow{\pi} M$ њено котангентно раслојење. Тада $\theta(X_p) := p(\pi_* X_p)$ дефинише 1−форму на T^*M, а $\omega := -d\theta$ недегенерисану тачну 2−форму.

  Задатак 5. Доказати да за сваку 1−форму β на M важи $\beta^*\theta = \beta$. $\diamondsuit$

- Комплексни пројективни простори $\mathbb{C}P^n$ са Фубини–Студијевом формом
  $$\omega := \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\|\zeta\|^2,\ \zeta = [\zeta_0 : \cdots : \zeta_n].$$

  Задатак 6. Доказати да је ω добро дефинисана форма (иако је $\|\zeta\|^2 = \sum \zeta_k \bar{\zeta}_k$ дефинисано на $\mathbb{C}^n$, али не и на $\mathbb{C}P^n$). $\spadesuit$

- Глатки пројективни варијетети.
  Нека су P_k хомогени полиноми $n+1$ комплексне променљиве. Пројективни варијетет је подскуп у $\mathbb{C}P^n$ дефинисан једначинама
  $$P_k([z_0 : \cdots : z_n]) = 0.$$

[9] Скупови нула коначног броја независних (тј. таквих да су им диференцијали линеарно независни) холоморфних функција n променљивих у $\mathbb{C}^n$.

Задатак 7. Доказати да је $P_k([z_0 : \cdots : z_n]) = 0$ добро дефинисана једначина (иако полином P не дефинише функцију на $\mathbb{C}P^n$). ♠

- Нека је Σ Риманова површ и $\Omega^1(\Sigma)$ алгебра 1−форми на Σ. Тада

$$\omega(\varphi, \psi) := \int_\Sigma \varphi \wedge \psi$$

дефинише симплектичку структуру на $\Omega^1(\Sigma)$.

- Производ $M_1 \times M_2$ симплектичких многострукости (M_1, ω_1) и (M_2, ω_2) са формом $\pi_1^*\omega_1 + \pi_2^*\omega_2$.

Задатак 8. Доказати да наведене многострукости јесу симплектичке.[10] ♢

7 Картанова формула

Нека је $\phi_t : M \to M$ глатка фамилија глатких пресликавања, $X(\phi_t(x)) = \dfrac{d}{dt}\phi_t(x)$ и α $k-$форма на M. Тада је

$$\frac{d}{dt}\phi_t^*\alpha = \phi_t^*(d(i(X)\alpha) + i(X)d\alpha). \tag{1}$$

Доказ: Индукцијом по k. За $k = 0$ формула (1) гласи

$$\frac{d}{dt}\phi_t^* f = \phi_t^* df(X),$$

што је само реформулација дефиниције извода функције f у правцу вектора X. Нека је β $k+1$-форма. Она се може записати као $\beta = df \wedge \alpha$, па коришћењем индуктивне претпоставке и особина диференцирања добијамо:

$$\frac{d}{dt}\phi_t^*(df \wedge \alpha) = \frac{d}{dt}\phi_t^* df \wedge \phi_t^*\alpha + \phi_t^* df \wedge \frac{d}{dt}\phi_t^*\alpha =$$
$$\phi_t^*[di(X)df \wedge \alpha + df \wedge i(X)d\alpha + df \wedge di(X)\alpha]$$

[10] За неке од њих видети задатак 41.

и

$$\begin{aligned}&\phi_t^*[i(X)d(df\wedge\alpha)+di(X)(df\wedge\alpha)]\\&=\phi_t^*[-i(X)(df\wedge d\alpha)+d(i(X)df\wedge\alpha-df\wedge i(X)\alpha)]\\&=\phi_t^*[di(X)df\wedge\alpha+df\wedge i(X)d\alpha+df\wedge di(X)\alpha].\end{aligned}$$

□

Задатак 9. Нека је α_t глатка фамилија диференцијалних форми. Доказати да је

$$\frac{d}{dt}\phi_t^*\alpha_t=\phi_t^*\left(d(i(X)\alpha_t)+i(X)d\alpha_t+\frac{\partial\alpha_t}{\partial t}\right).$$

♢

Задатак 10. Користећи Картанову формулу, доказати да глатко хомотопски еквивалентна пресликавања $h_0, h_1 : M\to N$ индукују исто пресликавање $H^*_{DR}(N)\to H^*_{DR}(M)$. ♢

8 Мозеров метод деформације

8.1 Деформације симплектичких структура

Теорема 1. [11] *Нека је ω_t фамилија симплектичких форми на многострукости M, таквих да је $[\omega_t]=const.\in H^2_{DR}(M)$. Тада постоји фамилија дифеоморфизама ϕ_t, таква да је $\phi_0=\mathrm{Id}$ и $\phi_t^*\omega_t=\omega_0$.*

Доказ: Конструисаћемо ϕ_t као решење једначине

$$\frac{d}{dt}\phi_t(x)=X(\phi_t(x)),\ \phi_0(x)=x, \tag{2}$$

где је векторско поље X изабрано на следећи начин. Диференцирајмо (жељену) једначину $\phi_t^*\omega_t=\omega_0$ по t, примењујући Картанову формулу. Добијамо да векторско поље X мора да задовољава

$$\phi_t^*\left(i(X)d\omega+di(X)\omega+\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)=0. \tag{3}$$

[11] J. Moser, *On the volume elemets on manifold,* Trans. Amer. Math. Soc. **120**, 280–296, 1965.

Пошто је $d\omega = 0$ и $\dfrac{\partial\omega}{\partial t} = d\sigma_t$, једначина (3) биће задовољена ако буде задовољена

$$i(X)\omega + \sigma_t = 0. \tag{4}$$

Једначину (4) можемо да решимо по X (зашто?), а затим, за тако добијено X, можемо да решимо (2) по ϕ (зашто?). $\square$

Задатак 11. Нека је Σ компактна оријентисана површ, а ω_0 и ω_1 две симплектичке форме на њој. Доказати да су (Σ, ω_0) и (Σ, ω_1) симплектоморфне ако и само ако важи

$$\int_\Sigma \omega_0 = \int_\Sigma \omega_1.$$

Упутство: $\omega_0 = \chi\omega_1$; деформисати χ до 1 не мењајући површину (вредност горњег интеграла) и не дегенеришући форму. Зашто је то могуће и зашто се тиме не мења кохомолошка класа? $\diamondsuit$

Задатак 12. Нека су Ω_0 и Ω_1 две n-форме оријентације на многострукости M димензије n (не обавезно симплектичкој). Доказати да постоји дифеоморфизам многострукости M који форму Ω_0 преводи у Ω_1 ако и само ако је

$$\int_M \Omega_0 = \int_M \Omega_1.$$

$\diamondsuit$

Задатак 13. Нека је N компактна подмногострукост многострукости M и ω_0, ω_1 две симплектичке форме на M такве да је $\omega_0 = \omega_1$ на $T_N M$. Доказати да постоји отворена околина U подмногострукости N и дифеоморфизам $\phi : U \to U$ такав да је $\phi^*\omega_1 = \omega_0$.
Упутство: Форма $\omega_t := t\omega_1 + (1-t)\omega_0$ је недегенерисана у некој околини $V \supset N$ (зашто?[12]). Изабрати $U \subset V$ тако да је $U \cong N$ (зашто је то могуће?[13]). Применити Картанову формулу... $\heartsuit$

Задатак 14. Нека је у Задатку 13 N тачка. Разматрањем тог случаја доказати Дарбуову теорему: свака симплектичка многострукост је локално симплектоморфна многострукости $(\mathbb{R}^{2n}, \sum dp_k \wedge dq_k)$. $\diamondsuit$

[12] Шта је $\omega|_{T_N M}$? „Недегенерисаност је отворено својство."

[13] В. теорему о цевастој околини у некој књизи о диференцијалној топологији.

8.2 Морсова лема

Лема 1. *Нека је* $a_0 \in \mathbb{R}^n$ *недегенерисана критична тачка*[14] *функције* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*. Тада постоји координатна карта око* a_0 *у којој функција* f *има запис*

$$f(x) = f(a_0) + \sum_{k=1}^{n} a_k x_k^2, \quad a_k = \pm 1.$$

Доказ:[15] Можемо да претпоставимо да је $a_0 = 0$ и $f(0) = 0$. Посматрајмо $1-$форме

$$\alpha_0(x)v = D^2 f(0)(x, v) \quad \text{и} \quad \alpha_1 = df$$

и глатку фамилију

$$\alpha_t := \alpha_0 + t(\alpha_1 - \alpha_0).$$

Глатка фамилија дифеоморфизама ψ_t, $\psi_0 = \mathrm{Id}$ преводи α_t у α_0 ако је

$$0 = \frac{d}{dt}\psi_t^* \alpha_t = \psi_t^*(d(i(X)\alpha_t) + i(X)d\alpha_t + \alpha_1 - \alpha_0). \tag{5}$$

Нека је

$$g(x) := \frac{1}{2} D^2 f(0)(x, x).$$

Тада је $\alpha_0 = dg$, па (5) постаје

$$\psi_t^* d(i(X)\alpha_t + f - g) = 0.$$

Решавањем ове једначине по X (зашто је то могуће?), а затим једначине (5) у ограниченој околини нуле по ψ_t добијамо координатну карту ψ_1 у којој је

$$df = d\left(\frac{1}{2} D^2 f(0)(\cdot, \cdot)\right),$$

па функција f има запис

$$f(x) = \frac{1}{2} D^2 f(0)(x, x),$$

што је и требало доказати. $\square$

Функција $f : M \to \mathbb{R}$ чије су све критичне тачке недегенерисане зове се *Морсова функција.* Скуп Морсових функција је свуда густ у скупу глатких функција на многострукости M.[16] Из Морсове леме следи да су критичне тачке Морсове функције изоловане.

[14] $df(a_0) = 0$ и матрица другог извода $D^2 f(a_0)$ је недегенерисана.

[15] R. Palais, *On Morse–Smale dynamical systems*, Topology **8**, 385–405, 1969.

[16] в. J. Milnor, *Morse theory,* Princeton Univ. Press, 1963.

9 Симплектоморфизми

Нека је M симплектичка многострукост са симплектичком формом ω и $\phi_t : M \to M$ глатка фамилија дифеоморфизама. Нека је

$$\frac{d}{dt}\phi_t(x) = X(\phi_t(x)),\ \phi_0(x) = x. \tag{6}$$

Тада је $\phi_t^*\omega \equiv \omega$ ако и само ако је $i(X)\omega$ затворена форма.
Доказ: Примена Картанове формуле. □

Ако је $1-$форма $i(X)\omega$ тачна и једнака dH_t за неку глатку фамилију глатких функција $H_t : M \to \mathbb{R}$, онда X називамо Хамилтоновим векторским пољем, а њиме генрисани (једначином (6)) дифеоморфизам Хамилтоновим дифеоморфизмом. Означавамо их са X_H и ϕ^H. Функцију H називамо Хамилтоновом функцијом или хамилтонијаном. Очигледно је да Хамилтонови дифеоморфизми чувају симплектичку форму.
За сваку функцију $H : [0,1]\times M \to \mathbb{R}$ *са компактним носачем* једначина (6) дефинише Хамилтонов дифеоморфизам.[17] Обрнуто, сваки Хамилтонов дифеоморфизам са компактним носачем (= такав да је $\phi = \mathrm{Id}$ ван неког компактног скупа) дефинисан је једначином (6) до на константу.

Задатак 15. Доказати да је дејство групе симплектоморфизама на M транзитивно. ♡

Задатак 16. Нека је X Хамилтоново векторско поље генерисано хамилтонијаном H и ψ било који симплектоморфизам (не обавезно Хамилтонов). Доказати да је $\psi^*X := (\psi^{-1})_*X$ Хамилтоново векторско поље генерисано Хамилтонијаном ψ^*H. ♢

Задатак 17. Нека је M компактна симплектичка многострукост и нека су $Ham(M)$ и $Sympl(M)$ Лијеве алгебре (*sic!*) Хамилтонових и симплек-

[17] Подсетити се теореме о егзистенцији, јединствености и продужењу решења диференцијалне једначине (последње захтева компактност).

тичких векторских поља. Доказати да су низови

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & 0 & \\
 & & & \downarrow & \\
0 \to \mathbb{R} \to C^\infty(M) \to & & & Ham(M) & \to 0 \\
 & & & \downarrow & \\
 & & & Sympl(M) & \\
 & & & \downarrow & \\
 & & & H^1_{DR}(M) & \\
 & & & \downarrow & \\
 & & & 0 &
\end{array}
$$

тачни. ♠

Задатак 18. Доказати да је $2-$сфера полупречника r без једне тачке симплектоморфна отвореном диску полупречника $2r$ и наћи експлицитну формулу симплектоморфизма. ♢

Напомена 1. *Приметимо да Задатак 18 не следи директно из Мозеровог метода, пошто се ради о отвореним многострукостима. Међутим, важи следећа*

Теорема 2. [18]*Ако су U и V два хомеоморфна отворена ограничена повезана подскупа еуклидског простора са глатким границама и једнаким запреминама, и $\phi : \partial U \to \partial V$ дифеоморфизам који чува оријентацију, онда постоји дифеоморфизам $\psi : U \to V$ који чува форму запремине и поклапа се са ϕ на граници.* □

Лема 2. *Нека су ϕ_t^H и ϕ_t^K путеви Хамилтонових дифеоморфизама генерисани хамилтонијанима H_t и K_t, ψ симплектоморфизам и нека је*

$$
\begin{aligned}
\overline{H}_t(x) &:= -H_t(\phi_t^H(x)),\\
(H\sharp K)_t(x) &:= H_t(x) + K_t((\phi_t^H)^{-1}(x)),\\
H_t^\psi(x) &:= H_t((\psi)^{-1}x).
\end{aligned}
$$

Тада је

1. $(\phi_t^H)^{-1} = \phi_t^{\overline{H}}$

[18]B. Dacorogna, J. Moser, *On a partial differential equation involving the Jacobian determinant*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Analyse non linéaire,**7**, 1–26, 1990.

2. $\phi_t^H \circ \phi_t^K = \phi_t^{H\sharp K}$

3. $\psi \circ \phi_t^H \circ (\psi)^{-1} = \phi_t^{H^\psi}$.

Доказ: Директно, диференцирањем леве стране. $\square$

10 Хамилтонове једначине у координатама

Задатак 19. Ако је X_H Хамилтоново векторско поље генерисано хамилтонијаном H, једначина (6) у координатама $\mathbf{q} = (q_1, \cdots, q_n)$, $\mathbf{p} = (p_1, \cdots, p_n)$ има облик

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{q}}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \\ \dfrac{d\mathbf{p}}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}. \end{cases} \tag{7}$$

Ознаке: $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$, $\ddot{q} = \frac{d^2q}{dt^2}$ итд.
Упутство: Довољно је једначину

$$i\left(\sum_{k=1}^n \dot{q}_k \frac{\partial}{\partial q_k} + \dot{p}_k \frac{\partial}{\partial p_k}\right) \sum_{k=1}^n dp_k \wedge dq_k = \sum_{k=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_k} dq_k + \frac{\partial H}{\partial p_k} dp_k$$

решити по $\dot{q}_k$, $\dot{p}_k$ за $n = 1$ (зашто?), односно решити

$$(\forall \xi = (\xi_1, \xi_2)) \qquad \begin{vmatrix} \dot{q} & \dot{p} \\ \xi_1 & \xi_2 \end{vmatrix} = \frac{\partial H}{\partial q} \xi_1 + \frac{\partial H}{\partial p} \xi_2.$$

$\diamondsuit$

11 Примери симплектоморфизама

- Хамилтонијан $H : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $H(z) = \frac{1}{2}|z|^2$ дефинише ротацију комплексне равни, јер је на основу једначине (7)

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p} = p\frac{\partial}{\partial q} - r\frac{\partial}{\partial p} = „\frac{\partial}{\partial \theta}".$$

Задатак 20. Наћи Хамилтоново векторско поље дефинисано хамилтонијаном $H : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $H(z) = |z|^4$. $\diamondsuit$

Задатак 21. Форма $d\theta$ је затворена форма у $\mathbb{C}^* := \mathbb{C}\backslash\{(0,0)\}$. Доказати да она дефинише векторско поље $X_\theta = r^{-1}\frac{\partial}{\partial r}$, које једначином (6) дефинише не-Хамилтонов симплектоморфизам (радијално пресликавање). ♢

- Форма $d\theta$ на цилиндру $Z := [0,1]\times\mathbb{S}^1$ дефинише не-Хамилтонов дифеоморфизам.
- Идентификацијом граница цилиндра из претходног примера добијамо торус $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ и не-Хамилтонов симплектоморфизам на њему.

Задатак 22. Доказати да се свака довољно мала контрактибилна петља на $\mathbb{T}^2$ може раздвојити од себе Хамилтоновим дифеоморфизмом.[19] ♡

Задатак 23. Дифеоморфизам $f : M \to M$ дефинише симплектоморфизам $f^* : T^*M \to T^*M$. ♢

Задатак 24. Симплектоморфизам у $\mathbb{C}^n$ чува збир површина пројекција 2−многострукости на координатне $\mathbb{C}-$равни; показати примером да не мора да чува сваку од тих n површина. ♠

12 Сувише кратки излет у класичну механику

„Сувише кратки” значи сувише да би се избегла поједностављивања.[20]

12.1 Други Њутнов закон

Трајекторија система честица је одређена диференцијалном једначином другог реда

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}). \tag{8}$$

[19] Неконтрактибилна петља се не може раздвојити од себе Хамилтоновим дифеоморфизмом (ова чињеница је нетривијална), док симплектички дифеоморфизми из претходног примера раздвајају неконтрактибилне петље.

[20] За више и прецизније о механичким изворима симплектичке геометрије (и о још много тога) препоручујемо: В. И. Арнолд, *Математички методи класичне механике*, Наука, Москва, 1974. Излагање у овој глави углавном следи ту књигу.

Координате вектора $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^N$ су координате вектора положаја помножене масама честица (нпр. $\mathbf{r} = (mx_1, my_1, mz_1, Mx_2, My_2, Mz_2)$ за систем од две честице које се крећу у $\mathbb{R}^3$). Ради једноставности, даље претпостављамо да су све масе јединичне.
Векторско поље $\mathbf{F}$ (сила која делује на честице) се назива *потенцијалним* ако је $\mathbf{F} = -\nabla V$ за неку функцију $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. Функција V назива се потенцијалном енергијом система, а функција $K(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\|\dot{\mathbf{r}}\|^2$ кинетичком енергијом.

Задатак 25. Нека су q_k Декартова координате честица, а $p_k \overset{\text{деф}}{=} \dot{q}_k$ (координате импулса; ово није општа, инваријантна дефиниција). Доказати да је систем диференцијалних једначина (8) еквивалентан систему (7) са хамилтонијаном $H = K + V$. $\diamondsuit$

Пошто једначине (7) можемо да напишемо и у облику (6), без координата, симплектичка геометрија нам омогућава да изучавамо класичну механику на многострукостима, независно од избора координата. Класични фазни простор система на многострукости M је T^*M. Ако су $\mathbf{q} = (q_1, \cdots, q_n)$ локалне координате на M (координате положаја), а $\mathbf{p} = (p_1, \cdots, p_n)$ локалне координате слоја раслојења T^*M (координате импулса), стандардна симплектичка форма има локални запис $d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q} = \sum dp_k \wedge dq_k$.

12.2 Варијациони принцип

Критичне тачке функционала

$$S(\mathbf{q}(t)) = \int_0^1 L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)dt \tag{9}$$

на простору путева који спајају две фиксиране тачке су решења система

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0 \tag{10}$$

(Ојлер–Лагранжеве једначине).

Доказ:

$$
\begin{aligned}
S(\mathbf{q}+\mathbf{h}(t)) - S(\mathbf{q}(t)) &= \int_0^1 \Big[L(\mathbf{q}+\mathbf{h}, \dot{\mathbf{q}}+\dot{\mathbf{h}}, t) - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)\Big]\, dt \\
&= \int_0^1 \left[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}\mathbf{h} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\dot{\mathbf{h}}\right] dt + O(\|\mathbf{h}\|^2) \\
&= \int_0^1 \left[\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)\right] \mathbf{h} dt + O(\|\mathbf{h}\|^2).
\end{aligned}
$$

Функција L зове се *лагранжијан* варијационог проблема.

Задатак 26. Доказати да су (8) Ојлер–Лагранжеве једначине за лагранжијан $L = K - V$. $\diamondsuit$

Задатак 27. Доказати да су трајекторије система са $V \equiv 0$ геодезијске линије метрике помоћу које је дефинисана функција K.[21] $\spadesuit$

12.3 Лежандрова трансформација

Нека је $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ конвексна (тј. са позитивно дефинитном матрицом другог извода) функција. Лежандровом трансформацијом функције F назива се функција $G(\mathbf{p}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} - F(\mathbf{x})$, где је $\mathbf{p} := \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}$.
Претпоставимо да је систем задат ланграгнжијаном $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ конвексним по другој промењљивој и нека је H Лежандрова трансформација функције F по тој промењљивој:

$$
H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) := \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t), \quad \mathbf{p} := \frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{q}}}. \tag{11}
$$

Тада је систем (10) једначина другог реда еквивалентан систему (7) једначина првог реда.

Доказ:

$$
dH = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} d\mathbf{p} + \frac{\partial H}{\partial t} dt = -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \dot{\mathbf{q}} d\mathbf{p} - \frac{\partial L}{\partial t} dt,
$$

[21] У случају $M = \mathbb{R}^3$ ово је први Њутнов закон. У општем случају, ово је симплектички поглед на Риманову геометрију. Важи и општији принцип: за свако V постоји метрика на Mтаква да су трајекторије система геодезијске у тој метрици (Фермаов принцип).

одакле следи

$$(12) \qquad \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \ -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, \ -\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Из (10) и (11) следи $\dot{\mathbf{p}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}$, па убацивањем у (12) добијамо систем (7). $\square$

Задатак 28. Доказати обрнуто, да из (7) следи (10). $\diamondsuit$

Задатак 29. Доказати израз

$$dH = -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \dot{\mathbf{q}} d\mathbf{p} - \frac{\partial L}{\partial t} dt,$$

који је коришћен у претходном доказу (и који је неочигледан због зависности неких променљивих које се у њему јављају). $\diamondsuit$

У општем случају, ако је M многострукост, Лежандрова трансформација дефинисана лагранжијаном $L : TM \to \mathbb{R}$ остварује изоморфизам

$$D_{\text{верт}} L : TM \xrightarrow{\cong} T^*M,$$

где је $D_{\text{верт}}\cdot$ вертикални извод (извод дуж влакна)[22] и придружује функцији L хамилтонијан $H : T^*M \to \mathbb{R}$:

$$H(\xi, t) := \xi((D_{\text{верт}})^{-1}\xi) - L((D_{\text{верт}})^{-1}\xi, t).$$

12.4 Примери

- **Кретање у гравитационом пољу.** Сила гравитације у $0_{q_1 q_2 q_3}$ координатном систему је вектор

  $$\mathbf{F} = -g \frac{\partial}{\partial q_3}, \quad g \approx 9{,}81 m/s^2.$$

  Потенцијална енергија је, одатле, $V = g q_3$. Једначина кретања је
  II Њутнов закон $\ddot{\mathbf{r}} = -g \frac{\partial}{\partial q_3}$,
  Лагранжев облик $L = \frac{1}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2) - g q_3$, па је једначина (10) опет

[22] Због тога нам је потребна претпоставка о недегенерисаности другог извода.

$$\ddot{\mathbf{r}} = -g\frac{\partial}{\partial q_3}.$$

Хамилтонов облик $H = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + gq_3$ и (7) је

$$\dot{q}_k = p_k,\ \dot{p}_1 = \dot{p}_2 = 0,\ \dot{p}_3 = -g.$$

Решење сваког од ових система је

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \dot{\mathbf{r}}(0)t - \frac{1}{2}gt^2\frac{\partial}{\partial q_3}.$$

- **Хармонијски осцилатор.** Експериментална чињеница је да је сила затезања опруге пропорционална дужини истезања. Једначине кретања су
  II Њутнов закон $\ddot{q} = -\alpha^2 q$.
  Лагранжев облик $L = \frac{1}{2}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\alpha^2 q^2$ и (10) је $\ddot{q} = -\alpha^2 q$.
  Хамилтонов облик $H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\alpha^2 q^2$; једначине (7) дају

  $$\dot{q} = p,\ \dot{p} = -\alpha^2 q.$$

  Решење сваке од ових једначина је $q = c_1 \cos \alpha t + c_2 \sin \alpha t$.

12.5 Хамилтон–Јакобијев метод

Симплектички дифеоморфизми[23] дају „смену променљивих” која чува облик (7) Хамилтонових једначина (в. Задатак 16). Хамилтон–Јакобијев метод решавања система (7) за дато H заснован је на избору симплектоморфизма ψ за који је функција $\psi^* H$ једноставнија од полазне H. Нека је ψ локално задато са

$$(\mathbf{Q}(\mathbf{q},\mathbf{p}), \mathbf{P}(\mathbf{q},\mathbf{p})). \tag{13}$$

Пошто је

$$d\mathbf{q} \wedge d\mathbf{p} - d\mathbf{Q} \wedge d\mathbf{P} = 0$$

[23] У класичној механици симплектички дифеоморфизми називају се канонске трансформације.

(јер је $\psi^*\omega = \omega$) и због $\omega = -d(\mathbf{p}d\mathbf{q})$, форма $\mathbf{p}d\mathbf{q} - \mathbf{P}d\mathbf{Q}$ је затворена. Како је свака затворена форма и *локално* тачна,[24] постоји локално дефинисана функција $S(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ за коју је

$$\mathbf{p}d\mathbf{q} - \mathbf{P}d\mathbf{Q} = dS. \tag{14}$$

Ако се једначине (13) могу локално решити по $\mathbf{p}$, онда се S може посматрати као функција променљивих $\mathbf{q}$, $\mathbf{Q}$, па из (14) следи $\mathbf{p} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}$, а одатле $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = H(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}})$. Претпоставимо да S задовољава парцијалну једначину

$$H\left(\mathbf{q}, \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}}\right) = K(\mathbf{Q}) \tag{15}$$

(Хамилтон–Јакобијева једначина). Тада се једначине (7) могу експлицитно решити. Заиста, S дефинише смену променљивих ψ; у новим координатама хамилтонијан је $K(\mathbf{Q})$ (не зависи од $\mathbf{P}$), па једначине (7) постају

$$\dot{\mathbf{Q}} = 0, \quad \dot{\mathbf{P}} = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{Q}}$$

и лако се решавају: $\mathbf{Q}(t) \equiv c_1$, $\mathbf{P}(t) = \frac{\partial K}{\partial \mathbf{Q}} t + c_2$.

13 Пуасонове многострукости

На алгебри $C^\infty(M)$ задата је бинарна операција

$$\{f, g\} := \omega(X_f, X_g),$$

где су X_f и X_g Хамилтонова векторска поља дефинисана Хамилтонијанима f и g.

Задатак 30. Доказати

1. $\{f, g\} = X_f g$ (извод у правцу).
2. $\{\cdot, \cdot\}$ је билинеарна операција.

[24] $H^k_{DR}(\mathbb{R}^k) = 0$ за $k \neq 0$.

3. $\{\cdot,\cdot\}$ задовољава Јакобијев идентитет

$$\{\{f,g\},h\}+\{\{g,h\},f\}+\{\{h,f\},g\}=0.$$

4. $\{\cdot,\cdot\}$ задовољава Лајбницово правило

$$\{f,gh\}=\{f,g\}h+g\{f,h\}.$$

5. У координатама

$$\{f,g\}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial p_k}\frac{\partial g}{\partial q_k}-\frac{\partial f}{\partial q_k}\frac{\partial g}{\partial p_k}\right).$$

$\diamondsuit$

Лијева алгебра је алгебра са билинеарним множењем које задовољава Јакобијев идентитет („Лијеве заграде”). *Пуасонова алгебра* је Лијева алгебра на којој Лијеве заграде задовољавају Лајбницово правило. *Пуасонова многострукост* је многострукост M са структуром Пуасонове алгебре $\{\cdot,\cdot\}$ на $C^\infty(M)$. Задатак 30 показује да је свака симплектичка многострукост Пуасонова.

Задатак 31. Нека хамилтонијан $H : M \to \mathbb{R}$ не зависи од времена. Доказати да је функција $F : M \to \mathbb{R}$ константна дуж путева дефинисаних хамилтонијаном H ако и само ако је

$$\{H,F\}\equiv 0. \tag{16}$$

$\diamondsuit$

За функције које задовољавају (16) каже се да су *у инволуцији*.

Задатак 32. Нека су ψ_t и ϕ_t Хамилтонови дифеоморфизми генерисани хамилтонијанима G и H са компактним носачем такви да је $\psi_t\circ\phi_t=\phi_t\circ\psi_t$ за свако t. Доказати да су G и H у инволуцији. Да ли исто тврђење важи без претпоставке о компактности носача? $\diamondsuit$

Теорема 3. (Арнолд–Лиувил) *Нека је на симплектичкој многострукости M дато $n=\frac{1}{2}\dim M$ функција у инволуцији*

$$F_1,\cdots F_n : M\to\mathbb{R}.$$

Означимо са $c:=(c_1,\cdots,c_n)\in\mathbb{R}^n$ и

$$M_c:=\{x\in M\mid F_k(x)=c_k\}.$$

Претпоставимо да су функције F_k независне на M. Тада

1. *M_c је глатка многострукост, инваријантна у односу на Хамилтонове дифеоморфизме генерисане функцијама F_k.*

2. *Ако је многострукост M_c компактна и повезана, онда је M_c дифеоморфна торусу $\mathbb{T}^n = (\mathbb{S}^1)^n$.*

3. *У координатама $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n) \in \mathbb{T}^n$ Хамилтонове једначине са хамилтонијаном F_1 имају вид*
$$\frac{d\varphi_k}{dt} = \varpi_{k,c}$$
одакле је $\varphi_k(t) = \varphi(0) + \varpi_{k,c}t$.

Доказ: в. Арнолдову књигу, гл. 10. $\square$

Функција F се назива *првим интегралом* Хамилтоновог система са хамилтонијаном H ако је F у инволуцији са H. Претходна теорема каже да, ако знамо n независних првих интеграла, систем можемо да решимо експлицитно у координатама $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n) \in \mathbb{T}^n$.

14 Закони очувања

14.1 Закон очувања енергије

Ако H не зависи од t онда је H константно дуж решења једначине (6) за свако фиксирано x.

Доказ: $\frac{d}{dt}H(\phi_t^H(x)) = dH(X_H) = \omega(X_H, X_H) = 0$. (Уп. Задатак 31.) $\square$

14.2 Лиувилова теорема

Симплектички дифеоморфизми чувају запремину дефинисану са $\omega^{\wedge n}$.
Доказ: $\phi^*(\omega \wedge \cdots \wedge \omega) = \phi^*\omega \wedge \cdots \wedge \phi^*\omega = \omega \wedge \cdots \wedge \omega$. $\square$

Задатак 33. Доказати да $1-$параметарска фамилија дифеоморфизама у $\mathbb{R}^n$ генерисана векторским пољем X чува запремину ако и само ако је $div(X) = 0$. Израчунати дивергенцију Хамилтоновог векторског поља и извести као последицу други доказ Лиувилове теореме. $\diamondsuit$

Следећа теорема показује да се систем честица које се крећу у ограниченом простору враћа произвољно близу полазног распореда.

Последица 1. (Поенкареова теорема) *Ако је M компактна сипмлектичка многострукост, ϕ симплектички дифеоморфизам и $p \in M$ било која тачка, онда за сваку околину $V \ni p$ постоји природан број k такав да је $\phi^k(V) \cap V \neq \emptyset$ ($\phi^k = \phi \circ \cdots \circ \phi$).*

Доказ: Због компактности многострукости M (тј. коначности њене запремине), скупови V, $\phi(V)$, $\phi(\phi(V)), \ldots$ не могу да буду дисјунктни; ако је $\phi^r(V) \cap \phi^s(V) \neq \emptyset$, онда је $\phi^{|r-s|}(V) \cap V \neq \emptyset$. □

14.3 Поенкаре–Картанова интегрална инваријанта

Лема 3. *Симплектоморфизам $\psi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ чува вредност функционала*

$$\mathcal{A}_0 : \Omega_0 := \{\gamma : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^{2n}\} \to \mathbb{R}, \quad \gamma \mapsto \int_\gamma \mathbf{p} d\mathbf{q}. \tag{17}$$

Доказ: Нека је $\gamma = \partial D$, тада је

$$\begin{aligned}\int_{\psi(\gamma)} \mathbf{p} d\mathbf{q} = \int_{\psi(D)} d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q} = \\ = \int_D d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q} = \\ = \int_\gamma \mathbf{p} d\mathbf{q}.\end{aligned}$$

□

Задатак 34. Доказати да важи и обрнуто: сваки дифеоморфизам у $\mathbb{R}^{2n}$ који чува функционал (17) је симплектички. ♢

Задатак 35. Доказати Лему 3 за произвољну *тачну* симплектичку многострукост (и за произвољне петље, не обавезно контрактибилне), ако је ψ Хамилтонов симплектоморфизам.
Упутство: сетити се Картанове формуле. ♢

Напомена 2. *Може се доказати и следећи став: Ако су γ_1 и γ_2 две петље у $\mathbb{R}^{2n}$ на којима функционал $\mathcal{A}_0$ има исту вредност, онда постоји симплектоморфизам $\psi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ који пресликава γ_1 у γ_2.*

Теорема 4. *Нека су γ_1 и γ_2 две затворене криве које обухватају цилиндар Z Хамилтонових трајекторија. Тада је*

$$\int_{\gamma_0} \mathbf{p}d\mathbf{q} - Hdt = \int_{\gamma_1} \mathbf{p}d\mathbf{q} - Hdt.$$

Доказ: По претпоставци, свака тачка криве γ_1 је крај неког Хамилтоновог пута који полази у одговарајућој тачки криве γ_0. Унија свих тих Хамилтонових путева је цилиндар Z. Нека је $s \in [0,1]$ параметар тих Хамилтонових путева, а t параметар на $\mathbb{S}^1$. Тада је $Z = \{\gamma_s(t) \mid 0 \leq s,t \leq 1\}$. Ако означимо са $X_s := \frac{d}{ds}\gamma_s$, онда је $X_H = a(s)X_s$, па је

$$\begin{aligned}
&\int_{\gamma_0} \mathbf{p}d\mathbf{q} - Hdt - \int_{\gamma_0} \mathbf{p}d\mathbf{q} - Hdt = \int_0^1 \frac{d}{ds}\left(\int_{\mathbb{S}^1} \gamma_s^*(\mathbf{p}d\mathbf{q} - Hdt)\right) ds = \\
&= \int_0^1 \int_{S^1} (d\gamma_s^* i(X_s)\mathbf{p}d\mathbf{q} + \gamma_s^* i(X_s)\omega - \gamma_s^* dH(X_s))ds = \\
&= \int_0^1 \left[\int_{S^1} (d\gamma_s^*(\mathbf{p}d\mathbf{q}(X_s) + da(s)H)\right] ds = 0,
\end{aligned}$$

јер је $\partial\mathbb{S}^1 = \emptyset$.

14.4 Симетрије

Дифеоморфизам $\phi : M \to M$ се назива *симетријом* лагранжијана $L : TM \to \mathbb{R}$ ако је $L \circ \phi_* = L$. Векторско поље се назива *инфинитезималном симетријом*, ако је њиме генерисани дифеоморфизам симетрија. Компонента импулса у правцу вектора инфинитезималне симетрије је интеграл кретања (константна дуж трајекторије); прецизније, важи следећа

Теорема 5. (Нетер) *Ако је $\sum x_k \frac{\partial L}{\partial q_k}$ инфинитезимална симетрија лагранжијана L, онда је функција*

$$\sum x_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$$

константна дуж трајекторија система (10).

Доказ: Нека је γ решење система (10), ϕ_s симетрија генерисана датом инфинитезималном симетријом и $\phi_s(\gamma(t)) = \mathbf{q}(s,t)$, тако да је $x_k = \frac{dq_k}{ds}$ дуж γ. Тада $L(\mathbf{q}(s,t), \dot{\mathbf{q}}(s,t))$ не зависи од s, па је

$$\frac{d}{dt}\sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{dq_k}{ds} = \sum_k \left[\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\frac{dq_k}{ds} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{d\dot{q}_k}{ds}\right] =$$
$$\sum_k \left[\frac{\partial L}{\partial q_k}\frac{dq_k}{ds} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{d\dot{q}_k}{ds}\right] = \frac{d}{ds}L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = 0.$$

□

14.5 Примери

Ради илустрације, наводимо неке примене у класичној механици, сасвим концизно и без прецизних доказа.[25]

Нека је $L = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}} - V(\mathbf{q})$ лагранжијан класичног механичког система.

Енергија. Ако лагранжијан не зависи експлицитно од времена,[26] транслација дуж временске осе је симетрија система, одакле следи (још један) доказ закона одржања енергије.

Импулс. Ако је систем симетричан у односу на транслацију[27] $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{q} + s\mathbf{e}$ дуж осе јединичног вектора $\mathbf{e}$, очувава се величина $\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_k} \cdot \mathbf{e}$.

Центар инерције. Вектор

$$\mathbf{R} := \frac{\sum m_k \mathbf{r}_k}{\sum m_k}$$

креће се равномерно праволинијски. Ово је последица закона о очувању импулса.

Кинетички момент. Вектор

$$\mathbf{M} := \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$$

назива се *кинетичким моментом* или *моментом количине кретања*. Нека је систем симетричан у односу на координатни почетак. Тада је

$$\frac{d}{dt}\mathbf{M} = \mathbf{0}.$$

Кеплерови закони. Посматрајмо кретање честице око координатног почетка (планете око Сунца). Из закона одржања кинетичког момента следи да се кретање одвија у једној равни, чиме се проблем своди на дводимензиони. Следећа теорема своди проблем на једнодимензиони.

[25] Заинтересованог читаоца упућујемо на [A], §§7, 8

[26] Такви системи називају се *конзервативним.*

[27] „Хомогеност простора”.

Теорема 6. *При кретању материјалне тачке јединичне масе у централном пољу са потенцијалном енергијом V, њено растојање од центра мења се као r у једнодимензионом проблему са потенцијаном енергијом $V(r)+\frac{M^2}{2r^2}$, где је M интензитет кинетичког момента (који је константа, по закону очувања кинетичког момента).* $\square$

- *I Кеплеров закон:* Орбита кретања планете је елипса, са Сунцем у жижи.
- *II Кеплеров закон:* Секторијална брзина кретања (брзина промене површине коју од елипсе одсеца вектор положаја) је константна.
- *III Кеплеров закон:* Квадрат периода револуције је пропорционалан кубу велике полуосе орбите.

15 Скоро комплексне структуре

Задатак 36. Нека је $h(\zeta,\eta) := \zeta\cdot\bar{\eta}$ стандардни ермитски производ у $\mathbb{C}^n$ и нека је

$$h(\cdot,\cdot) = g(\cdot,\cdot) + \sqrt{-1}\omega(\cdot,\cdot), \tag{18}$$

где су g и ω реални и имагинарни део h.

1. Доказати да је g Риманова метрика, а ω симплектичка форма.
2. Нека су $O(2n)$, $U(n)$, $Sp(2n)$ и $GL(n,\mathbb{C})$ групе ортогоналних, унитарних, симплектичких и недегенерисаних комплексних матрица. Доказати да је

$$O(2n)\cap Sp(2n) = Sp(2n)\cap GL(n,\mathbb{C}) = GL(n,\mathbb{C})\cap O(2n) = U(n).$$

Упутство: матрица која чува две структуре у (18) чува и трећу. $\diamondsuit$

Скоро комплексна структура на M је глатка фамилија линеарних пресликавања $J_p : T_pM \to T_pM$ таквих да је $J_p^2 = -\,\mathrm{Id}_p$. Кажемо да је J сагласно са ω ако је $\omega(\cdot, J\cdot)$ Риманова метрика на M.

Задатак 37. Комплексна структура i на $\mathbb{C}$ је ротација тангентних вектора за $\frac{\pi}{2}$; Схватајући тангентне векторе као операторе, пишемо

$$i\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}, \quad i\frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}.$$

Шта значе ове формуле? (тј. примена ових оператора на функције)? Упутство–упозорење: може се одговорити на два начина. $\diamondsuit$

Задатак 38. Доказати да је у Задатку 36 комплексна структура сагласна са симплектичком формом. $\diamondsuit$

Лема 4. *На свакој симплектичкој многострукости (M, ω) постоји скоро комплексна структура сагласна са симплектичком формом.*

Доказ: Нека је g било која Риманова метрика на M. Тада је $\omega(\cdot,\cdot) = g(\cdot, A\cdot)$ за неку антисиметричну матрицу A. Ако је $A^2 = -\mathrm{Id}$, то је било то... У противном, користећи $-A^2 = A^\top A > 0$, узмемо $J := A(\sqrt{-A^2})^{-1}$. $\square$

Задатак 39. Завршити доказ. $\diamondsuit$

Теорема 7. *Скуп скоро комплексних структура сагласних са ω је контрактибилна бесконачнодимензиона многострукост.*[28] $\square$

Обрнуто није тачно. На пример, сфера $\mathbb{S}^6$ није симплектичка (в. Задатак 4), а има скоро комплексну структуру. Скоро комплексна структура на $\mathbb{S}^6$ (и било којој оријентисаној хиперповрши у $\mathbb{R}^7$) може се конструисати на следећи начин. Посматрајмо $\mathbb{R}^7$ као имагинарне Кејлијеве бројеве. Дефинишимо „векторски прооизвод" у $\mathbb{R}^7$ као

$$\mathrm{Im}(\mathbf{a}) \times \mathrm{Im}(\mathbf{b}) := \mathrm{Im}(\mathbf{a} \star \mathbf{b}) \tag{19}$$

где је $\star$ Келијево множење. За хиперповрш $\Sigma \subset \mathbb{R}^7$ скоро комплексна структура

$$J_p : T_p\Sigma \to T_p\Sigma$$

је дата са

$$J_pX_p := \nu(x) \times X_p$$

[28] За доказ погледати, нпр. [MS1].

где је ν Гаусово пресликавање, тј. јединично сечење нормалног раслојења.[29] (На исти начин на свакој оријентабилној провши у $\mathbb{R}^3$ конструише се комплексна структура, са кватернионима уместо Кејлијеве алгебре; тада је (19) стандардни векторски производ.)

Задатак 40. Доказати да је свака скоро комплексна многострукост оријентабилна. $\diamondsuit$

Задатак 41. Нека је $N \subset M$ подмногострукост чије је тангентно раслојење затворено у односу на неко J сагласно са ω. Доказати да је N симплектичка многострукост. $\diamondsuit$

Задатак 42. Доказати да је $X_H \perp \nabla H$ (у којој метрици?). Доказати одатле да је, ако H не зависи од t, поље X_H тангентно на хиперповрш $\{H = const.\}$ (други доказ закона одржања енергије). $\diamondsuit$

Задатак 43. Нека је C затворена крива на оријентисаној површи и H хамилтонијан. Доказати да је X_H негде тангентно на C. $\heartsuit$

Нека су (M, J_M) и (N, J_N) две скоро комплексне многострукости. Пресликавање $u : M \to N$ се назива *(псеудо)холоморфним* ако је $Du \circ J_M = J_N \circ Du$ (уопштење обичне холоморфности). Скоро комплексна многострукост зове се комплексном (а њена скоро комплексна структура интеграбилном) ако је она локално бихоломорфна $\mathbb{C}^n$. Један од критеријума интеграбилности је

Теорема 8. *Скоро комплексна структура J је интеграбилна ако и само ако је*

$$[JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y] = 0.$$

$\square$

Израз $N_J(X, Y) := [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] - [X, Y]$ зове се Нијенхуисов тензор.

Колико се разликују скоро комплексне и комплексне многострукости? Свака скоро комплексна дводимензиона многострукост је комплексна (в.

[29] Гаусово пресликавање придружује тачки p хиперповрши јединични нормални вектор; овде нам је потребна оријентабилност: подмногострукост оријентабилне многострукости је оријентабилна ако и само ако је њено нормално раслојење оријентабилно (зашто?); раслојење ранга 1 је оријентабилно ако и само ако је тривијално, па је за оријентабилне хиперповрши Гаусово пресликавање добро дефинисано.

Теорему 8); постоје скоро комплексне 4−многострукости које нису комплексне; у вишим димензијама ово је отворен проблем.

Борел и Сер су (методама теорије хомотопије) доказали да су $\mathbb{S}^2$ и $\mathbb{S}^6$ једине сфере које допуштају скоро комплексну структуру. Знамо да је $\mathbb{S}^2$ $(= \mathbb{C}P^1)$ комплексна многострукост; отворено питање је да ли је $\mathbb{S}^6$ комплексна (тј. да ли допушта *интеграбилну*) комплексну структуру.

Комплексна симплектичка многострукост зове се *Келерова многострукост*, а њена симплектичка форма *Келерова форма.* Видели смо у Задатку 4 да су Бетијеви бројеви[30] парног реда симплектичке многострукости различити од нуле. За Келерове многострукости важи и следећа

Лема 5. *Нека је M компактна Келерова многострукост. Тада су Бетијеви бројеви b_{2k+1} парни.*

Ова лема је последица Хоџове теореме о декомпозицији кохомологије компактних Келерових многострукости.[31] Диференцијална k−форма на комплексној многострукости M са вредностима у $\mathbb{C}$ облика

$$\sum a_{I,K}(z)dz_I \wedge d\bar{z}_K,$$

где су I и K мултииндекси дужине p и $q := k - p$ зове се (p, q)−формом. Нека је

$$H^{p,q}(M) := \frac{\text{затворене}\,(p,q) - \text{форме}}{\text{тачне}\,(p,q) - \text{форме}}$$

и $H^k(M, \mathbb{C}) := H^k_{DR}(M) \otimes \mathbb{C}$ (кохомологија са комплексним коефицијентима).

Теорема 9. (Хоџова декомпозиција) *Нека је M компактна и Келерова. Тада је*

$$H^k(M, \mathbb{C}) \cong \bigoplus_{p+q=k} H^{p,q}(M), \quad H^{p,q}(M) = \overline{H^{q,p}(M)}.$$

□

Бројеви $h^{p,q} := \dim H^{p,q}(M)$ зову се Хоџови бројеви.

[30]Бетијеви бројеви многострукости M су $b_k(M) := \dim H^k(M)$.

[31]За више о комплексној геометрији в. нпр. [GH].

Задатак 44. Доказати Лему 5. $\diamondsuit$

Задатак 45. Доказати да је Келерова форма $(1,1)-$форма. $\spadesuit$

Навешћемо још једну важну особину Келерових многострукости,

Теорема 10. (Лефшецова теорема) *Нека је ω Келерова форма на компактној многострукости M. Пресликавање $L(\eta) := \eta \wedge \omega$ индукује изоморфизам*

$$L^k : H^{n-k}(M) \to H^{n+k}(M).$$

Групе

$$P^{n-k}(M) := \operatorname{Ker}(L^{k+1} : H^{n-k}(M) \to H^{n+k+2}(M))$$

зову се примитивна кохомологија *и важи*

$$H^m(M) = \bigoplus_k L^k P^{m-2k}(M)$$

(„Лефшецова декомозиција”). $\square$

16 Функционал дејства

Нека је ω тачна симплектичке форма на M, $\omega = -d\theta$.

Задатак 46. Доказати да је M или некомпактна или има границу. $\spadesuit$

Означимо са $\mathcal{P} := \{\gamma : [0,1] \to M\}$ простор глатких путева у M.
Функционал дејства $\mathcal{A}_H : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ дефинисан је са

$$\mathcal{A}_H(\gamma) := \int_0^1 \gamma^*\theta - H_t(\gamma(t))dt.$$

Теорема 11. (Принцип најмањег дејства) *Нека је $\mathcal{P}_0$ било који потпростор простора $\mathcal{P}$ на коме је $\theta(\gamma(1)) = \theta(\gamma(0))$. Критичне тачке рестрикције функционала дејства $\mathcal{A}_H$ на $\mathcal{P}_0$ су Хамилтонови путеви (тј. решења једначине (7)).*[32]

[32]Један пример таквог потпростора $\mathcal{P}_0$ је простор петљи ($\gamma(0) = \gamma(1)$), други, у случају котангентног раслојења, простор путева који почињу и завршавају се на нултом сечењу...

Доказ: Нека је γ_s варијација пута γ; $\gamma_0 = \gamma$ и $\xi = \frac{d}{ds}\big|_{s=0}\gamma_s(t) \in T_\gamma\mathcal{P}$. Тада је

$$\begin{aligned} d\mathcal{A}_H(\gamma)\xi &= \int_0^1 \gamma^*(d(i(\xi)\theta) + i(\xi)d\theta - dH(\gamma)\xi)dt \\ &= \int_0^1 \gamma^*(-i(\xi)\omega - dH(\gamma)\xi)dt + \int_0^1 \gamma^*(d(i(\xi)\theta)) \\ &= -\int_0^1 \omega(\xi, \dot\gamma - X_H(\gamma))dt + \theta(\gamma(1))\xi - \theta(\gamma(0))\xi. \end{aligned}$$

□

Теорема 11 и Задатак 26 дају два варијациона принципа у класичној механици. Иако се функционал $\mathcal{A}_H$ варира у широј класи путева него S (у (9) $\mathbf{q}$ и $\dot{\mathbf{q}}$ нису независне, а $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ су у Хамилтоновим једначинама (7) и у Теореми 11 независне локалне координате), путеви на T^*M који су критичне тачке првог пројектују се на путеве који су критичне тачке другог и једнозначно се подижу на T^*M до критичних тачака првог.[33]

Задатак 47. Доказати да је $L^2([0,1], M)-$градијент[34] функционала дејства на потпростору $\mathcal{P}_0$ из Теореме 11 $\nabla\mathcal{A}_H(\gamma) = J(\frac{d\gamma}{dt} - X_H)$. ♠

Задатак 48. Доказати да је функционал дејства добро дефинисан на простору контрактибилних петљи и без услова $\omega = -d\theta$, ако се он замени условом $\pi_2(M) = 0$. ♠

Задатак 49. Доказати да у општем случају $d\mathcal{A}_H$ дефинише затворену 1−форму на простору контрактиблиних петљи. ♢

17 Лагранжеве подмногострукости

Нека је ω симплектичка форма на M. Подмногострукост $L \overset{j_L}{\hookrightarrow} M$ се зове Лагранжева ако је $\dim L = \frac{1}{2}\dim M$ и $j_L^*\omega = 0$. Оне су један од најзна-

[33] Ова два варијациона принципа одговарају двема формулацијама класичне механике, Хамилтоновој (на котангентним раслојењима) и Лагранжевој (на тангентним раслојењима). Лежандрова трансформација остварује прелаз са једног језика на други (онда када је он могућ, као у случају конвексних лагранжијана).

[34] тј. градијент у односу на метрику $\int_0^1 \omega(\cdot, J\cdot)dt$

чајнијих објеката у симплектичкој топологији и геометрији. Као једну илустрацију тога, наводимо следећу лему.[35]

Лема 6. *Дифеоморфизам $\psi : M \to M$ је симплектички ако и само ако је његов график $\Gamma := \{(p, \psi(p)) \mid p \in M\}$ Лагранжева подмногострукост у $M \times M$ са симплектичком формом $\omega \oplus (-\omega)$.*[36]

Доказ: $j_\Gamma^*(\omega \oplus (-\omega)) = \omega - \psi^*\omega$. □

Задатак 50. Нека је на $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n}$ симплектичка форма задата са $d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q} - d\mathbf{P} \wedge d\mathbf{Q}$ и нека је $\Delta := \{(\xi, \xi) \mid \xi \in \mathbb{R}^{2n}\}$. Доказати да је пресликавање $\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to T^*\Delta$

$$(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{Q}, \mathbf{P}) \mapsto \left(\mathbf{q} - \mathbf{Q}, \frac{1}{2}(\mathbf{q} + \mathbf{Q}), \mathbf{p} - \mathbf{P}, \frac{1}{2}(\mathbf{p} + \mathbf{P})\right)$$

симплектоморфизам. ♢

Примери:

- $\mathbb{R}^n$ је Лагранжева подмногострукост у $\mathbb{C}^n$.
- Свака крива у $\mathbb{C}$ је Лагранжева подмногострукост.
- Торус $\mathbb{T}^n = \mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1$ је Лагранжева подмногострукост у $\mathbb{C}^n$. Одатле и из Дарбуове теореме (Задатак 14) следи да у свакој симплектичкој многострукости постоје Лагранжеве подмногострукости.[37]
- Нека је $\beta : M \to T^*M$ $1-$форма. Тада је $\beta(M)$ Лагранжева подмногострукост у T^*M ако и само ако је $d\beta = 0$ (зашто?).[38]

  Задатак 51. Имајући у виду овај пример, Лему 6 и Задатак 50, интерпретирати главу 12.5. ♣

- Конормална раслојења: за подмногострукост $N \subset M$ конормално раслојење
  $$\nu^*N := \{\xi \in T_N^*M \mid \xi(TN) = \{0\}\}$$
  је Лагранжева подмногострукост у T^*M.

---

[35] Нестрпљивог читаоца жељног да омах сазна због чега све још изучавамо ове објекте, упућујемо на главу 2.

[36] Прецизније: симплектичка форма на $M \times M$ дефинисана је са $(X, Y) \mapsto \omega(\pi_{1*}X, \pi_{1*}Y) - \omega(\pi_{2*}X, \pi_{2*}Y)$.

[37] Постоје симплектичка раслојења која немају Лагранжева подраслојења.

[38] в. Задатак 5

- $\mathbb{R}P^n \subset \mathbb{C}P^n$ је Лагранжева подмногострукост.
- Ако је M глатки пројективни варијетет у $\mathbb{C}P^n$ дефинисан хомогеним полиномима *са реалним коефицијентима*, онда је $M \cap \mathbb{R}P^n$ Лагранжева подмногострукост у M.

Задатак 52. Доказати да су све ове подмногострукости Лагранжеве. ♢

Задатак 53. Доказати да је L Лагранжева ако и само ако је $TL \perp JTL$ (у односу на коју Риманову метрику?).[39] ♠

Задатак 54. Нека је L компактна Лагранжева подмногострукост у M. Доказати да постоји отворена околина $U \supset L$ симплектоморфна околини нултог сечења у T^*L у T^*L („Дарбу-Вејнстејнова теорема").[40]
Упутство: Постоји дифеоморфизам ψ околине L на околину нултог сечења у T^*L (зашто?). На TL је $\omega = \psi^*\omega_{T^*L}$ (зашто?). Доказати (рецимо користећи Задатак 53 и идентификацију цевасте околине са нормалним раслојењем) да се ова једнакост може проширити на $T^*_L M$ (модификовањем дифеоморфизма ψ) и применити (претходно решен) Задатак 13. ♣

Задатак 54 каже да Лагранжеве подмногострукости имају канонску околину, слично тачкама (Задатак 14).

Задатак 55. Нека је $j_t : L \to M$ фамилија Лагранжевих подмногострукости. Тада је форма

$$j_t^*(i(X_t)\omega), \quad X_t(j_t(x)) := \frac{dj_t(x)}{dt}$$

тачна за свако t ако и само ако постоји фамилија Хамилтонових дифеоморфизама $\phi_t^H : M \to M$ таква да је $j_t(L) = \phi_t^H(L)$ („тачна деформација Лагранжевих подмногострукости реализује се као амбијентна Хамилтонова деформација").
Упутство: Нека је $j_t^*(i(X_t)\omega) = dh_t$. Користећи скоро комплексну структуру на M раширити h_t до функције H_t на M. ♣

[39] Слабијим условом $TL \oplus JTL = TM$ (где директна сума није обавезно ортогонална) дефинишу се тзв. *тотално реалне* подмногострукости комплексних многострукости. Скуп тотално реланих подмногострукости је отворен, у смислу да „мала" хомотопија преводи тотално реалне у тотално реалне подмногострукости (зашто?). Да ли је то тачно и за Лагранжеве (и зашто није?)?

[40] Један пример је Задатак 50, са $L = \Delta$.

Задатак 56. (Хамилтон–Јакобијев принцип) Нека је $L \subset M$ Лагранжева подмногострукост садржана у хиперповрши $\{H = const.\}$. Доказати да је $X_H \in TL$ и, према томе, L инваријантно у односу на Хамилтонов дифеоморфизам ϕ^H (генерисан хамилтонијаном H).[41] $\diamondsuit$

Подмногострукост $L \overset{j}{\hookrightarrow} T^*M$ димензије $\dim M$ је Лагранжева ако је 1−форма $j^*\theta$ затворена; ако је та форма тачна, онда L зовемо *тачном Лагранжевом подмногострукошћу.* Из Задатка 5 следи да да је $dS(M)$ тачна Лагранжева подмногострукост. Општије, за $N \subset M$, и $S : N \to \mathbb{R}$, многострукост

$$\nu_S^N := \{\xi \in T_N^*M \mid \xi(X) = dS(X), \text{ за } X \in TN\}$$

је тачна. Специјално, ν^*N је тачна.

Задатак 57. Нека је $E \to M$ векторско раслојење и $S : E \to \mathbb{R}$ таква глатка функција да је $D_{\text{верт}}S : E \to E^*$ трансверзално на нулто сечење $\mathbf{0}_{E^*}$. Тада је

$$\Sigma_S := \{e \in E \mid D_{\text{верт}}S(e) = 0\}$$

подмногострукост у E. Доказати да је

$$i_S : \Sigma_S \to T^*M, \quad i_S(e) := dS(e)$$

тачна Лагранжева имерзија. $\clubsuit$

Функција S и претходног задатка назива се *генеришућа функција* подмногострукости $\mathrm{Im}(i_S)$. Отворен проблем је да ли свака тачна Лагранжева подмногострукост допушта генеришућу функцију.

Задатак 58. Нацртати Σ_S и $i_S(\Sigma_S)$ ако је

1. $E = \mathbb{R}_\xi \times \mathbb{R}_q \xrightarrow{\pi} M := \mathbb{R}_q$,

$$S(q, \xi) = \frac{1}{3}\xi^3 - q\xi.$$

[41] ср. Задатак 42

2. $E = \mathbb{R}_\xi \times \mathbb{R}_q \xrightarrow{\pi} M := \mathbb{R}_q$,

$$S(q,\xi) = \frac{1}{3}\xi^3 + q^2\xi - \xi.$$

$\diamondsuit$

Задатак 59. Описати Σ_S и $i_S(\Sigma_S)$ ако је

$$E = \{\gamma : [0,1] \to T^*M \mid \gamma(0) \in \mathbf{0}_M\}, \quad \pi : E \to M, \quad \pi(\gamma) := \pi_0(\gamma(1)),$$

где је $\pi_0 : T^*M \to M$ и $S := \mathcal{A}_H$ (иако E овде није *векторско* раслојење).$\diamondsuit$

Задатак 60. Нека је ψ_t фамилија Хамилтонових дифеоморфизама и L тачна Лагранжева подмногострукост. Доказати да је за свако t подмногострукост $\psi_t(L)$ тачна Лагранжева подмногострукост. $\diamondsuit$

Специјално, Хамилтонове деформације нултог сечења у T^*M су тачне Лагранжеве подмногострукости. Ако је M компактно, то су једине познате *компактне* тачне Лагранжеве подмногострукости у T^*M. Да ли их има још, отворен је проблем.

Рестрикција пројекције $\pi : T^*M \to M$ на Хамилтонову деформацију нултог сечења има степен 1 (зашто?). Није познато ни да ли ово важи за произвољну компактну тачну Лагранжеву подмногострукост.[42]

Из Стоксове формуле следи да не постоји компактна тачна Лагранжева подмногострукост утопљена у $\mathbb{C}$, другим речима, $\mathbb{S}^1$ се може реализовати као тачна подмногострукост у $\mathbb{C}$ само као имерзија („осмица”).

С друге стране, Хамилтонове деформације нултог сечења у $T^*\mathbb{S}^1$ су компактне тачне Лагранжеве подмногострукости. Приметимо да је индекс[43] утопљене затворене криве у $\mathbb{C} \cong T^*\mathbb{R}$ једнак ± 1, док је индекс тачне Лагранжеве подмногострукости у $T^*\mathbb{S}^1$ једнак нули (зашто?). Уопштење индекса криве је индекс Маслова Лагранжеве подмногострукости $L \subset T^*M$. Скуп сингуларних тачака пројекције $\pi : L \to M$ је хиперповрш $\Gamma \subset L$

[42] У случају $M = \mathbb{S}^1$ одговор је потврдан, што се може лако видети цртањем кривих на цилиндру.

[43] Индекс криве је број обртаја око неке површине коју ограничава.

чији су сингуларитети у кодимензији три,[44] па се може говорити о алгебарском броју пресека криве $\gamma \subset L$ и Γ, што дефинише хомоморфизам $\mu : \pi_1(L) \to \mathbb{Z}$, који се назива *индекс Маслова.* Отворен проблем је да ли је индекс Маслова тачне Лагранжеве подмногострукости једнак нули.

М. Громов је 1985. године потврдио хипотезу коју је поставио В. И. Арнолд, доказавши да не постоје *компактне* тачне Лагранжеве подмногострукости у $\mathbb{C}^n$. Ово је само један од многих резултата добијених техником (псеудо) холоморфних кривих које је увео Громов у раду[45] пуном дубоких резултата, чије су последице још увек несагледиве.[46] У глави 19 скицираћемо детаље те богате теорије.

18 Симплектичка редукција

18.1 Изотропне и коизотропне подмногострукости

Нека је $N \subset M$ подмногострукост симплектичке многострукости. Означимо са $(TN)^{\perp_\omega} \subset TM$ подраслојење тангентних вектора у TM који су $\omega-$ортогонални на TN. Подмногострукост N се назива

- *изотропном* ако је $TN \subset (TN)^{\perp_\omega}$
- *коизотропном* ако је $(TN)^{\perp_\omega} \subset TN$.

Подмногострукост N је Лагранжева ако је $TN = (TN)^{\perp_\omega}$ (приметимо да одатле следи $\dim N = \frac{1}{2}\dim M$), а симплектичка ако је $TN \cap (TN)^{\perp_\omega} = \{0\}$.

Задатак 61. Нека су (M_k, ω_k), $k = 1, 2$ симплектичке многострукости исте димензије, $N \overset{j}{\hookrightarrow} M_1$ коизотропна многострукости и $\phi : N \to M_2$ утапање

[44] в. V. I. Arnold, A. B. Givental, *Symplectic geometry*, Encyclopaedia of mathematical sciences, Dynamical systems IV, Springer 1980.

[45] M. Gromov, *Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math **82**, 307–347, 1985.

[46] Под утицајем поменутог рада развиле су се нове области као што су квантна кохомологија, Флорова хомологија, нови поглед на енумеративну алгебарску геометрију, развијене примене у топологији 4−димензионих многострукости, огледалска симетрија, геометрија и топологија групе Хамилтонових дифеоморфизама, Лагранжевих подмногострукости...

за које важи $\phi^*\omega_2 = j^*\omega_1$. Доказати да се ϕ може продужити до симплектичког дифеоморфизма неке отворене околине V $(M_1 \supset V \supset N)$.
Упутство: Најпре раширити ϕ до дифеоморфизма ϕ неке околине $U \supset N$ тако да је $\phi^*\omega_2|_N = \omega_1|_N$, а затим применити Задатак 13 (уп. Задатке 54 и 55). ♣

Теорема 12. *Нека је $N \subset M$ коизотропна подмногострукост. Тада је дистрибуција $(TN)^{\perp_\omega}$ интеграбилна.*

Напомена 3. *$k-$дистрибуцијом на многострукости P назива се глатка фамилија $k-$димензионих потпростора простора T_pP за свако $p \in P$. За разлику од $1-$дистрибуција (тј. векторских поља), $k-$дистрибуција у општем случају није интеграбилна, тј. није тангентно раслојење неке помногострукости*[47] *Важи следећа*

Теорема 13. (Фробенијусова теорема)[48] *Дистрибуција је интеграбилна ако и само ако је затворена за операцију Лијевих заграда $[\cdot,\cdot]$* □

Доказ теореме 12: Нека су X, Y векторска поља из $(TN)^{\perp_\omega}$ и $Z \in TN$. Тада је

$$\begin{aligned}
&0 = d\omega(X,Y,Z) = \\
&= X\omega(Y,Z) + Y\omega(Z,X) + Z\omega(X,Y) + \omega([Y,Z],X) + \omega([Z,X],Y) + \omega([X,Y],Z) \\
&= \omega([X,Y],Z).
\end{aligned}$$

Доказ следи из Фробенијусове теореме. □
Из теореме 12 следи да се коизотропна подмногострукост $N \subset M$ разлистава на изотропне листове.[49] Претпоставимо да су листови компактне повезане подмногострукости у N и дефинишимо релацију еквиваленције на N са $x \sim y$ ако и само ако x и y леже на истом листу.

Теорема 14. *1. Количнички скуп $N/_\sim$ је симплектичка многострукост.*
2. Ако је $L \subset M$ Лагранжева многострукост таква да је[50]

[47] Другим речима, теорема егзистенције решења обичних диференцијалних једначина не важи за парцијалне једначине.
[48] в. M. Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry, I,* гл. 6.
[49] За појам разлиставања (фолијације) в. споменуту Спивакову књигу, стр. 264.
[50] Кажемо да се тада L и M секу *чисто.*

$$(\forall p \in L \cap N) T_p(L \cap N) = T_pL \cap T_pN,$$

онда је њена слика $L/_\sim \subset N/_\sim$ *Лагранжева подмногострукост.*[51]

Доказ следи из

1. $T_{[p]}(N/_\sim) = \dfrac{T_pN}{(T_pN)^{\perp_\omega}}$
2. $T_{[p]}(L/_\sim) = \dfrac{T_pL \cap T_pN}{T_pL \cap (T_pN)^{\perp_\omega}}$. □

Многострукости $N/_\sim$ зовемо *симплектичком редукцијом* коизотропне подмногострукости N.

Задатак 62. Нека је M глатка многострукост и $N \subset M$ њена глатка подмногострукост. Доказати да је $T^*_N M$ коизотропна подмногострукост многострукости T^*M и да је њена симплектичка редукција (симплектоморфна) T^*N. ♡

18.2 Кратки осврт на Лијеве групе

Лијева група је група која је истовремено и глатка многострукост, таква да су операције (производ и инверз) глатка пресликавања.
Примери:[52] Нека је $\mathbb{K}$ поље $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$.

- Векторски простор $(\mathbb{K}, +)$.
- Линеарне групе (матричне групе са операцијом множења матрица):
  1. Група инвертибилних $n \times n$ матрица $GL(n, \mathbb{K})$.
  2. Група $SL(n, \mathbb{K})$ $n \times n$ матрица са детерминантом 1.
  3. Група $O(n)$ ортогоналних $n \times n$ матрица над $\mathbb{R}$.
  4. Група $U(n)$ унитарних $n \times n$ матрица над $\mathbb{C}$.
  5. $SO(n) := O(n) \cap SL(n, \mathbb{R})$, $SU(n) := U(n) \cap SL(n, \mathbb{C})$.
  6. Група $Sp(2n)$ симплектичких матрица.

[51] Не обавезно утопљена (у општем случају имерзија).
[52] Елементаран увод у Лијеве групе је M. L. Curtis, *Matrix groups*, Springer–Verlag.

- Пројективне линеарне групе $PSL(n) := SL(n,\mathbb{C})/_{A\sim\lambda A}$.
- *Spin* и *Pin* групе:

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to Spin(n) \to SO(n) \to 1,$$

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to Pin(n) \to O(n) \to 1.$$

Задатак 63. Доказати да је $SO(3) \cong \mathbb{R}P^3$. ♡

Нека је G Лијева група и $g \in G$. Пресликавања R_g, $L_g : G \to G$, $R_g(h) := hg$, $L_g(h) := gh$ су дифеоморфизми и зову се *десна и лева транслација.* Векторско поље X на G је *левоинваријантно* ако је $L_{g*}X_h = X_{gh}$. Алгебра левоинваријантних векторских поља зове се Лијева алгебра Лијеве групе G, она се природно идентификује са тангентним простором T_eG у јединици. Лијеве алгебре линеарних група означавају се малим словима, $so(n)$ је Лијева алгабра групе $SO(n)$ итд.

Задатак 64. Нека је G Лијева група и $\mathcal{G}$ њена Лијева алгебра. Доказати да је тангентно раслојење TG тривијално и $TG \cong G \times \mathcal{G}$. ♢

Хомоморфизам $\mathbb{R} \to G$ Лијевих група (јасно нам је шта је то!?) $\mathbb{R}$ и G зове је *једнопараметарска подгрупа* групе G. Свако $X \in \mathcal{G}$ генерише једнопараметарску подгрупу $\gamma(t)$ као решење једначине

$$\frac{d\gamma}{dt} = X(\gamma(t)), \quad \gamma(0) = e. \tag{20}$$

Задатак 65. Доказати да једначина (20) заиста дефинише једнопараметарску подгрупу. ♢

Нека је γ једнопараметарска подгрупа генерисана вектором $X_e \in T_eG$. Пресликавање

$$\exp : \mathcal{G} \to G, \quad X \mapsto \gamma(1)$$

назива се *експоненцијално пресликавање.*

Задатак 66. Доказати да је $\exp tX = \gamma(t)$. ♢

(Лево) дејство Лијеве групе G на многострукости M је глатко пресликавање
$$M \times G \to M, \quad (x, g) \mapsto g \cdot x$$
које задовољава
$$e \cdot x = x, \quad g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x.$$
Природно се дефинише десно дејство, изменом другог услова (тако да је лева транслација пример левог, а десна десног дејства групе на себи самој).

Задатак 67. Уопштити Задатак 65: доказати да на произвољној многострукости M произвољно векторско поље X *са компактним носачем* генерише дејство 1−параметарске групе $\mathbb{R}$ на M. Зашто нам је претпоставка о компактности потребна у првом, а није у другом случају? $\heartsuit$

Скуп $G \cdot x := \{g \cdot x \mid g \in G\} \subset M$ назива се *орбита* тачке $x \in M$; скуп $G_x := \{g \in G \mid g \cdot x = x\} \subset G$ назива се *стабилизатор* (или *група изотропије*) елемента x. Дејство групе на многострукости је
транзитивно ако $(\forall x, y \in M)(\exists g \in G)\ y = g \cdot x$, тј. ако је $G \cdot x = M$ за све $x \in M$.
ефективно ако $(\forall x \in M)\ g \cdot x = x \Rightarrow g = e$.
слободно (или без фиксних тачака) ако $(\exists x \in M)\ g \cdot x = x \Rightarrow g = e$.
регуларно (или тачно дисконтинуирано) ако су испуњени следећи услови

1. Ако $x, y \in M$ нису у истој орбити, онда постоје околине $U_x \ni x$ и $U_y \ni y$ такве да је $g \cdot U_x \cap U_y = \emptyset$ за свако $g \in G$.

2. Стабилизатор G_x је коначан за свако $x \in M$.

3. Свака тачка $x \in M$ има околину U која је стабилна при дејству G_x и таква да је $U \cap g \cdot U = \emptyset$ за свако $g \notin G_x$.

Наводимо без доказа следеће две теореме.[53]

Теорема 15. *Ако G дејствује слободно и регуларно на M, онда је количнички простор M/G глатка многострукост.* $\square$

[53] Докази се могу наћи у, нпр. S. Kobayashi, K. Nomitzu, *Foundations of differential geometry*, Vol. I, Wiley Clasiic Lib., 1997.

Теорема 16. *Ако G дејствује транзитивно на M, онда је, за произвољно $x \in M$, $M \cong G/G_x$.* $\square$

Многострукост на којој Лијева група дејствује транзитивно назива се *хомогени простор*, из Теореме 16 следи да да су хомогени простори многострукости G/H, где је G Лијева група и H њена затворена Лијева подгрупа.

Задатак 68. Доказати да је скуп $G_k(\mathbb{K}^n)$ свих $k-$димензионих потпростора простора $\mathbb{K}^n$ многострукост (Грасманова многострукост, или Грасманијан, уопштење пројективног простора). $\diamondsuit$

Задатак 69. Доказати да је скуп $V_k(\mathbb{K}^n)$ свих $k-$димензионих координатних система у $\mathbb{K}^n$ многострукост (Стифелова многострукост). $\diamondsuit$

Задатак 70. Доказати да је скуп $F(\mathbb{K}^n, k_1, \cdots, k_s)$ за $1 \leq k_1 \leq \cdots k_s \leq n-1$ свих потпростора $V_1 \subset \cdots \subset V_s$ простора $\mathbb{K}^n$, таквих да је $\dim V_j = k_j$, многострукост (многострукост застава). $\diamondsuit$

Нека G слободно десно дејствује на P; означимо са $M := P/G$. Локално тривијална фибрација $\pi : P \to M$ се назива *главним $G-$раслојењем* ако за сваку тачку $x \in M$ постоји околина $V \ni x$ и тривијализација $\phi : \pi^{-1}(V) \to V \times G$ која комутира са десним дејством G.

Задатак 71. Доказати да је простор свих репера слојева векторског раслојења E над M главно $GL(n, \mathbb{R}^n)$ раслојење над M. $\heartsuit$

Задатак 72. Доказати да је линеарна репрезентација групе G (тј. хомоморфизам групе G у неки подгрупу групе $GL(n, \mathbb{K})$) дефинише транзитивно дејство на главном $G-$раслојењу $P \to M$ и, последично, дефинише векторско раслојење

$$E := P \times_G \mathbb{K}^n \to M,$$

где је на левој страни количнички простор тог дејства. $\heartsuit$

Раслојење E из Задатка 72 зове се *индукованим раслојењем* за дато главно $G-$раслојење и репрезентацију групе G.

Обрнуто, из Задатка 71 видимо да за свако векторско раслојење постоји главно раслојење које га индукује.

Задатак 73. Доказати да главно раслојење $P \to M$ има сечење ако и само ако је тривијално ($P = M \times G$). ♠

Задатак 74. Доказати да је сваки аутоморфизам $\Phi : P \to P$ облика $\Phi(p) = p \cdot \varphi(p)$, где је $\varphi : P \to G$ глатко пресликавање које задовољава[54] $\varphi(p \cdot g) = g^{-1} \cdot \varphi(p) \cdot g$. ♠

18.3 Марсден–Вејстејнова редукција

Нека је G компактна Лијева група и $\mathcal{G}$ њена Лијева алгебра. *Симплектичко дејтво* групе G на M дато је хомоморфизмом групе G у групу симплектоморфизама многострукости M; оно дефинише хомоморфизам Лијеве алгебре $\mathcal{G}$ у Лијеву алгебру симплектичких векторских поља:

$$\mathcal{G} \ni \xi \mapsto X_\xi := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(t\xi).$$

Форма $i(X_\xi)\omega$ је затворена, ако је она тачна за свако ξ имамо хамилтонијан H_ξ. Дејство се назива *Хамилтоновим* ако је

$$\mathcal{G} \to C^\infty(M), \quad \xi \mapsto H_\xi$$

хомоморфизам Лијевих алгебри (на $C^\infty(M)$ структура Лијеве алгебре дата је Пуасоновим заградама). *Моментно преликавање* је пресликавање

$$\mu : M \to \mathcal{G}^*$$

такво да је

$$H_\xi(p) = \langle \mu(p), \xi \rangle.$$

Задатак 75. Доказати да је у случају $G = \mathbb{S}^1$, μ хамилтонијан. ♡

Теорема 17. *Претпоставимо да је $0 \in \mathcal{G}^*$ регуларна вредност пресликавања μ и да је дејство групе G слободно и регуларно (тако да је $\mu^{-1}(0)/G$ многострукост). Тада је $\mu^{-1}(0)$ коизотропна подмногострукост, чији су изотропни листови орбите $G-$дејства. Количнички скуп $M//G := \mu^{-1}(0)/G$ је симплектичка многострукост димензије* $\dim M - 2\dim G$.

Доказ изостављамо.[55] □

[54]Овакво пресликавање назива се баждарна (енг. gauge) трансформација.
[55]в. [MS1] стр. 175

Задатак 76. Доказати да је дејство $(\exp(\sqrt{-1}\theta), \mathbf{z}) \mapsto \exp(\sqrt{-1}\theta)\mathbf{z}$ групе $G = \mathbb{S}^1$ на $\mathbb{C}^{n+1}$ Хамилтоново, да је његово моментно пресликавање (хамилтонијан) $H(z) = -\pi|z|^2$ и да је симплектичка редукција која одговара регуларној вредности $-\pi$ комплексни пројективни простор $\mathbb{C}P^n$ са Фубини–Студијевом формом до на константни множитељ.
Упутство: шта је рестрикција форме $\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\partial\bar{\partial}\log\|\mathbf{z}\|^2$ на $\mathbb{S}^{2n+1} = H^{-1}(-\pi)$?♣

19 Холоморфне криве

У овој глави скицираћемо неке методе уведене 1985. године у споменутом раду М. Громова. Због техничке сложености не можемо навести све детаље, али покушаћемо да изложимо основне идеје.[56]
Нека је Σ Риманова површ са комплексном структуром j и M симплектичка многострукост, са сагласном скоро комплексном структуром J (в. Лему 4). Пресликавање $u : \Sigma \to M$ је холоморфно[57] ако је

$$du \circ j = J \circ du.$$

Овде је d ознака за извод; $du = u_*$. Оператор du се разлаже на j, $J-$линеарни део и антилинеарни део

$$du = \frac{1}{2}(du - J \circ du \circ j) + \frac{1}{2}(du + J \circ du \circ j);$$

последњи се означава са $\bar{\partial}_J$.

19.1 Оцена енергије

Риманова структура нам омогућава да меримо дужину реалних кривих на многострукости. Следећа лема показује да нам симплектичка структура даје неку врсту комплексне аналогије – могућност да меримо површину холоморфних кривих, али независно од метричке структуре на многострукости.

Лема 7. *Нека је $u : \Sigma \to M$ холоморфна крива на симплектичкој многострукости M. Тада је*

[56]Опширније о холоморфним кривама може се наћи у [AL, MS2].
[57]У употреби су и термини *псеудо холоморфно*, *$J-$холоморфно* и *$J - j$ холоморфно.*

$$\int_\Sigma u^*\omega = \frac{1}{2}\int_\Sigma \|u\|^2 d\sigma, \tag{21}$$

где је норма на десној страни Хилберт-Шмитова норма оператора $du : T\Sigma \to TM$.

Доказ: Нека је $\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\}$ ортонормирана база у $T\Sigma$.

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma u^*\omega &= \int_\Sigma \omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\wedge dy \\
&= \int_\Sigma \omega\left(du\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), du\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right) dx\wedge dy \\
&= \int_\Sigma \omega\left(du\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), du\left(j\frac{\partial}{\partial x}\right)\right) dx\wedge dy \\
&= \int_\Sigma \omega\left(du\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), Jdu\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right) dx\wedge dy \\
&= \int_\Sigma \left|du\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right|^2 dx\wedge dy
\end{aligned}$$

(где је $|\cdot|$ норма дефинисана Римановом метриком $\omega(\cdot, J\cdot)$) и слично

$$\int_\Sigma u^*\omega = \int_\Sigma \left|du\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\right|^2 dx\wedge dy.$$

Сабирањем добијамо (21). $\square$

Вредно је приметити да је лева страна у (21) тополошка, а десна геометријска (или аналитичка) величина

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_\Sigma \|u\|^2 d\sigma \tag{22}$$

(која се зове *енергија криве u*). Лема 7 нам омогућава да $W^{1,2}-$норму Собољева контролишемо тополошким условима. На пример, ако су Σ и M компактне и $u_n : \Sigma \to M$ низ холоморфних кривих за које је $u_{n*}[\Sigma] = A$ за неку фиксирану хомолошку класу $A \in H_2(M, \mathbb{Z})$ (где је $[\Sigma]$ генератор групе $H_2(\Sigma, \mathbb{Z})$), онда је низ u_n униформно ограничен у $W^{1,2}(\Sigma, M)$ (зашто?). Ова чињеница је од значаја за испитивање компактности простора холоморфних кривих.

Споменимо још и да је мерење запремине подмногостукости интеграцијом *глобалних* форми феномен специфичан за комплексну геометрију.[58] Ако је ω имагинарни део ермитске форме на комплексној многострукости M и $S \subset M$ комплексна подмногострукост комплексне димензије d, онда је

$$Vol(S) := \frac{1}{d!} \int \omega^{\wedge d},$$

док се, на пример, дужине кривих на реалној многострукости не могу мерити глобално дефинисаном формом (зашто?).

19.2 Фредхолмова теорија

Нека су E_1 и E_2 Баханови простори. *Фредхолмов оператор* је ограничено линеарно пресликавање $L : E_1 \to E_2$ са особинама:

1. $\dim \mathrm{Ker}(L) < \infty$
2. $\mathrm{Image}(L)$ је затворен
3. $\dim \mathrm{Coker}(L) < \infty$.[59]

Индекс Фредхолмовог оператора је

$$\mathrm{Index}(L) := \dim \mathrm{Ker}(L) - \dim \mathrm{Coker}(L).$$

Ако су E_1, E_2 коначнодимензиони, онда је $\mathrm{Index}(L) = \dim E_1 - \dim\ E_2$. Скуп Фредхолмових оператора је отворен у простору ограничених оператора у топологији дефинисаној операторском нормом. Индекс је непрекидна (што значи локално константна) функција у тој топологији. Компактна пертурбација Фредхолмовог оператора је Фредхолмов оператор истог индекса.

Нека су V и W Банахове многострукости.[60] Пресликавање $f : V \to W$ назива се *Фредхолмово пресликавање* ако је $Df(x)$ Фредхолмов оператор за свако $x \in V$. Ако је V повезана, индекс оператора $Df(x)$ не зависи од

[58] в. [GH], гл. I (Вритингерова теорема и дискусија после ње).

[59] $\mathrm{Coker}(L) := E_2 / \mathrm{Image}(L)$.

[60] Банахова многострукост се дефинише тако што се за локалне карте узме Банахов простор и понови уобичајена дефиниција.

x и назива се *индекс пресликавања* f.

Подсетимо се да је $x \in V$ *сингуларна тачка* пресликавања f ако $Df(x)$ није сурјекција; $f(x)$ се тада назива *сингуларном вредношћу.* Тачка $y \in W$ је *регуларна вредност* ако није сингуларна вредност (дакле, и тачка која није у слици пресликавања f је, по дефиницији, регуларна вредност).

Теорема 18. (Сард-Смејл) *Скуп сингуларних вредности Фредхолмовог пресликавања f класе C^q са $q > \max\{0, \mathrm{Index}(f)\}$ је прве категорије.*[61] $\square$

Последица 2. *Ако је $f : V \to W$ Фредхолмово пресликавање класе C^q са $q > \max\{0, \mathrm{Index}(f)\}$, онда је, за генеричко*[62] *$y \in W$, скуп $f^{-1}(y)$ многострукост димензије* $\mathrm{Index}(f)$. $\square$

Примена на холоморфне криве.

Нека је Σ_g Риманова површ рода g и нека је $A \in H_2(M, \mathbb{Z})$. Означимо са $\mathcal{M}_{J,g}(A)$ скуп $J-$холоморфних кривих $u : \Sigma_g \to M$ за које је

$$u_*[\Sigma_g] = A.$$

Теорема 19. *За генеричку скоро комплексну структуру J скуп $\mathcal{M}_{J,g}(A)$ $J-$холоморфних кривих $u : \Sigma_g \to M$ је многострукост коначне димензије.*

Идеја доказа: Нека је $\mathcal{F}$ комплетирање простора $C^\infty(\Sigma_g, M)$ у $W^{k,p}$ топологији Собољева. За $u \in \mathcal{F}$ је

$$\bar{\partial}_J u(z) := \frac{1}{2}(du + J \circ du \circ j) \in \mathrm{Hom}(T_z\Sigma_g, T_{u(z)}M),$$

где су j и J (скоро) комплексне структуре на Σ_g и M. Другим речима,

$$u \mapsto \bar{\partial}_J u \tag{23}$$

је сечење Банаховог раслојења $\mathcal{E} \to \mathcal{F}$ са влакном

$$\mathcal{E}_u = L^p(\Sigma_g, \mathrm{Hom}(T\Sigma_g, u^*TM))$$

[61] Скуп прве категорије је пребројива унија нигде густих скупова.

[62] Термин „генерички" овде означава „сваки ван скупа прве категорије"; иначе, „генерички" није универзално дефинисан (а јесте универзално коришћен) термин и означава „скоро сваки", када је из контекста јасно шта то значи.

изнад $u \in \mathcal{F}$. Холоморфне криве су пресек нултог сечења и сечења (23) раслојења $\mathcal{E}$. Посматрајмо раслојење

$$\mathcal{E} \to \mathcal{F} \times \mathcal{J}_\omega, \tag{24}$$

где је $\mathcal{J}_\omega$ Банахова многострукост добијена као Собољевљево комплетирање многострукости скоро комплексних структура на M сагласних са ω. Сечење

$$\sigma : (u, J) \mapsto \bar{\partial}_J u$$

је у трансверзалном положају у односу на нулто сечење раслојења (24), па је

$$\mathcal{Z} := \sigma^{-1}(\mathbf{0})$$

Банахова многострукост (бесконачне димензије). Пројекција

$$\pi : \mathcal{Z} \to \mathcal{J}_\omega, \quad (u, J) \mapsto J$$

је Фредхолмово пресликавање, па је, за генеричко $J \in \mathcal{J}_\omega$

$$\mathcal{M}_{J,g} = \pi^{-1}(J)$$

коначнодимезниона многострукост. □

Напомена 4. *Индекс пресликавања $\bar{\partial}_J$, а тиме и димензија многострукости холоморфних кривих, може да се израчуна експлицитно и износи*

$$\dim \mathcal{M}_{J,g}(A) = 2(c_1(A) + n(1 - g)),$$

где је c_1 прво Чернова класа[63] *многострукости M. Приметимо да димензија не зависи од J.*

19.3 Компактност

Нека је Σ_g компактна Риманова површ и M компактна симплектичка многострукост. *Сингуларна холоморфна крива* је формална коначна сума

[63] Чернове класе су овде дефинисане у односу на било коју комплексну структуру сагласну са ω, последица Теореме 7 је да дефиниција не зависи од тог избора.

$$u(\Sigma_g) + \sum m_k v_k(\mathbb{C}P^1),$$

где су m_k природни бројеви, а

$$u : \Sigma_g \to M, \quad v_k : \mathbb{C}P^1 \to M,$$

холоморне криве.

Теорема 20. (Громовљева теорема компактности) *Нека је*

$$u_n : \Sigma_g \to M$$

низ холоморфних пресликавања таквих да је

$$u_{n*}[\Sigma_g] = A \in H_2(M, \mathbb{Z}). \tag{25}$$

Тада постоји сингуларна крива $u_\infty := u_0 + \sum m_k v_k$ таква да за неки подниз низа u_n (означен опет са u_n) важи:

1. *Ван коначног скупа тачака $\{z_1, \cdots, z_m\} \subset \Sigma_g$*

   $$\lim_{n\to\infty} u_n = u_0$$

   у C^1-топологији.

2. $u_{0*}[\Sigma_g] + \sum m_k v_{k*}[\mathbb{C}P^1] = A$.

3. $E(u_\infty) := E(u_0) + \sum m_k E(v_k) = \lim_{n\to\infty} E(u_n)$.

4. *Скупови* $\mathrm{Im}(u_\infty)$ *конвергирају ка* $\mathrm{Im}(u_\infty)$ *у Хаусдорфовој топологији.*

5. $\mathrm{Im}(u_\infty)$ *је повезан и кроз сваки тачку z_k из 1. пролази нека од сфера v_s.*[64]

Уместо доказа: Из компактности M, Леме 7 (која због (28) даје униформну $W^{1,2}$ ограниченост низа u_n) и теорема Собољева о утапању, следи да низ u_n конвергира локално у C^1-топологији. Коришћењем минималности холоморфних кривих, теорије минималних површи и неких изопериметријских неједнакости, доказује се да се вредности интеграла енергије (22)

[64] Али не пролазе све кроз неку од тачака z_k, нити све додирују $u_\infty(\Sigma_g)$.

акумулира у коначно много тачака, односно да у коначно много тачака $\{z_1, \cdots, z_m\} \subset \Sigma_g$ важи

$$\lim_{n\to\infty} \|du_n\|_\infty = +\infty, \tag{26}$$

док ван скупа $\{z_1 \cdots, z_m\}$ имамо C^1-конвергенцију. У околини z_1 холоморфна сфера се појављује на следећи начин. Посматрајмо прeликавање $\tilde{u}_n$ дефинисано у локалној карти $V \ni z_1$ са

$$\tilde{u}_n := u_n\left(\frac{z}{\|du_n\|_{L^\infty(V)}}\right). \tag{27}$$

Слике $\tilde{u}_n(V)$ припадају низу слика $u_n(\Sigma)$. Пошто је $\|d\tilde{u}_n\|$ ограничено, $\tilde{u}_n$ конвергира, а из (26) следи да се домени пресликавања $\tilde{u}_n$ шире у бесконачност, па је гранично пресликавање дефинисано на целој равни $\mathbb{C} = \mathbb{C}P^1 \setminus \{N\}$. Затим, може се доказати теорема о отклањању сингуларитета (аналогија Риманове теореме из комплексне анализе) и применити на граничну функцију низа $\tilde{u}_n$ (опет применом теорије минималних површи и изопериметријских својстава холоморфних кривих), тако да се гранично пресликавање проширује на целу сферу. На крају, уместо репараметризације (27), треба изабрати пажљивију репараметризацију како би се контролисало додавање енергије при додавању холоморфних сфера типа $\tilde{u}_n$, при чему се могу јављати нове сфере на већ додатим, тако да су испуњени сви услови теореме (очување тоталне енергије и тоталне хомологије). $\square$

Последица 3. *1. Ако је $A \in H_2(M, \mathbb{Z})$ нераставльива, онда је $\mathcal{M}_{J,g}(A)$ компактна многострукост.*
2. Ако је $\omega(\pi_2(M)) = 0$ нераставльива, онда је $\mathcal{M}_{J,g}(A)$ компактна многострукост.

Задатак 77. Доказати Последицу 3. ♠

Задатак 78. Нека је $u_n : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^1$ низ холоморфних пресликавања Риманове сфере у себе, дефинисан у стандардној карти са $u_n(z) = nz$.
(а) Доказати да је $u_{n*}[\mathbb{C}P^1] = const.$ у $H_2(\mathbb{C}P^1, \mathbb{Z})$.
(б) Шта је C^1-лимес из Теореме 20?
(в) Шта је Хаусдорфов лимес из Теореме 20? ♠

Задатак 79. Нека је Σ_1 крива трећег реда у $\mathbb{C}P^2$ задата једначином $\xi^3 - \eta^3 - \xi\zeta^2 = 0$ и

$$u_n : \Sigma_1 \to \mathbb{C}P^2, \quad [\xi : \eta : \zeta] \mapsto \left[\xi : \frac{1}{n}\eta : \frac{1}{n^2}\zeta\right]$$

низ холоморфних кривих. Описати низ слика[65] и одговорити на три питања из претходног задатка. ♡

Задатак 80. Исто као у претходном задатку за криве $u_n, v_n : \mathbb{C}P^1 \to \mathbb{C}P^2$ дате са

$$u_n(z) = \left[z : \frac{z^2}{n} : \frac{1}{n}\right], \quad v_n(z) = \left[z : z^2 : \frac{1}{n^2}\right].$$

♡

19.4 Неке примене

19.4.1 Теорема о сфери и цилиндру

Лиувилова теорема (глава 14.2) каже да је група симплектичких дифеоморфизама подгрупа групе дифеоморфизама који чувају запремину. Сваки скуп се може пресликати у скуп веће запремине тако да му се очува запремина. Следећа теорема Громова показује да се то не може увек учинити чувајући симплектичку форму.

Теорема 21. *Нека је $B_r^{2n} \subset \mathbb{C}^n$ лопта полупречника r и Z_R цилиндар $D_R \times \mathbb{C}^{n-1}$, где је $D_R := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ и нека је $\psi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ симплектичко пресликавање такво да је*

$$\psi(B_r) \subset Z_R.$$

Тада је $r \leq R$.

Напомена 5. *У претходној теореми база цилиндра је у q_1, p_1-равни. Ако базу изаберемо, рецимо, у q_1, q_2-равни, трансформација*

$$(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \mapsto (\varepsilon q_1, \varepsilon^{-1} p_1, \varepsilon q_2, \varepsilon^{-1} p_2, q_3, p_3, \cdots, q_n, p_n)$$

чува сипмлектичку форму $\sum dq_k \wedge dp_k$ и пресликава (избором довољно малог ε) сферу већег у цилиндар мањег полупречника. Теорема 21 важи само ако је база цилиндра „координатна раван положаја и импулса честице".[66]

[65] Или: „доказати да је низ слика задат једначинама $\frac{1}{n^4}\xi^3 - \frac{1}{n}\eta^3 - \xi\zeta^2 = 0$".

[66] „Аналогија Хајзенберговог принципа неодређености у класичној механици."

Идеја доказа Теореме 21: Нека је C холоморфни диск у B_r^{2n} који пролази кроз центар лопте и чији је руб на рубу лопте. Нек је $A(C)$ површина криве C. Познати резултат из теорије минималних површи (Лема о монотоности) каже да је

$$A(C) \geq \pi r^2. \tag{28}$$

Пошто је C холоморфна,

$$A(C) = \int_C \omega = \int_{\psi(C)} \omega$$

(јер је ψ симплектичко). Ако проширимо $\psi(C)$ до холоморфне криве $\widetilde{C}$ са границом на ∂D_R, имаћемо

$$\int_{\psi(C)} \omega \leq \int_{\widetilde{C}} \omega = \int_{D_R} \omega = \pi R^2,$$

одакле, због (28), следи $r \leq R$.

Да бисмо остварили ову конструкцију холоморфне криве $\widetilde{C}$, утопимо околину слике $\psi(B_r^{2n}) \subset Z$ у (компактну многострукост) $M := \mathbb{S}^2 \times \mathbb{T}^{2n-2}$, где је $\mathbb{S}^2$ сфера површине $\pi r^2 + \varepsilon$, а $\mathbb{T}^{2n-2}$ торус. Нека је J_0 стандардна комплексна структура на $B_r^{2n} \subset \mathbb{C}^{2n}$ и нека је J скоро комплексна структура на M која је на $\psi(C)$ једнака $\psi_* J_0$. Пошто је $\pi_2(\mathbb{T}^{2n-2}) = 0$, из Последице 3 следи да је $\mathcal{M}_{J,0}([\mathbb{S}^2 \times *])$ компактна многострукост. Пресликавање

$$ev : \mathcal{M}_{J,0}([\mathbb{S}^2 \times *]) \times_G \mathbb{C}P^1 \to M, \quad (u, z) \mapsto u(z),$$

где је $G = \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ група Мебијусових трансформација[67]) има степен 1 (ако је $J = i \times J'$ то је очигледно; општи случај следи из овог специјалног, на основу хомотопске инваријантности степена). Зато постоји $J-$холомофна крива кроз сваки тачку у M, па и кроз $\psi(0)$. Инверзна слика те криве при пресликавању ψ је J_0-холоморфна крива C, за коју се може спровести претходно резоновање. $\square$

[67]тј. бихоломорфних репараметризација сфере $\mathbb{C}P^1$

19.4.2 Тачне Лагранжеве подмногострукости и егзотичне симплектичке структуре

У глави 17 споменули смо следећи разултат Громова:

Теорема 22. *Не постоји тачна Лагранжева подмногострукост утопљена у* $\mathbb{C}^n$*.*

Доказ ове теореме такође је последица егзистенције холоморфних кривих. Анализом сличном претходној (овог пута за Риманове површи са границом и Коши-Риманове једначине са Лагранжевим граничним условима) Громов је доказао да за сваку Лагранжеву многострукост L постоји холоморфни диск са границом на L. Одатле, из Леме 7 и Стоксове теореме следи тврђење Теореме 22 (зашто?). Као последицу Теореме 22, Громов је доказао да постоје егзотичне симплектичке структуре на $\mathbb{R}^{2n}$, тј. да постоји таква симплектичка форма ω на $\mathbb{R}^{2n}$ да се $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ не може утопити у $(\mathbb{R}^{2n}, d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q})$. Доказ се заснива на конструкцији имерзије $\psi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ која пресликава дату компактну Лагранжеву многострукост на тачну Лагранжеву многострукост; тада је $\omega := \psi^*(d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q})$ тражена егзотична структура (на основу Теореме 22).

19.4.3 Флорова хомологија: пар речи

У овој глави M ће увек означавати *компактну* многострукост.

Морсова теорија

Нека је M компактна многострукост и $f : M \to \mathbb{R}$ Морсова функција. Тада је скуп критичних тачака

$$Crit_p(f) := \{x \in M \mid df(x) = 0, \mathrm{Index}\, D^2 f(x) = p\}$$

ограничен. Нека је

$$C_p(f) := \left\{\sum \alpha_k x_k \mid x_k \in Crit_p(f), \alpha_k \in \mathbb{Z}_2\right\} \tag{29}$$

$\mathbb{Z}_2-$векторски простор генерисан са $Crit_p(f)$. За $x_+ \in Crit_p(f)$, $x_- \in Crit_q(f)$ простор $\mathcal{M}(x_-, x_+)$ кривих $\gamma : \mathbb{R} \to M$ које задовољавају „негативну градијентну једначину"

$$\frac{d\gamma}{dt} = -\nabla f, \quad \gamma(\pm\infty) = \pm x \tag{30}$$

је многострукост димензије $p-q$ (за генерички избор метрике g употребљене за дефиницију ∇). Ово се доказује методом сличном методи из главе 19.2, примењеној на преликавање

$$\gamma \mapsto \frac{d\gamma}{dt} + \nabla f. \tag{31}$$

Задатак 81. Како изгледа раслојење на коме (31) треба посматрати као сечење, аналогно сечењу $\bar{\partial}_J$ у глави 19.2? $\diamondsuit$

Задатак 82. Доказати да низ решења једначине (30) има локално (на $\mathbb{R}$) униформно конвергентан подниз.
Упутство: применити Арцела–Асколијеву теорему. $\heartsuit$

Група $\mathbb{R}$ дејствује на $\mathcal{M}(x_-, x_+)$ по правилу $\gamma(\cdot) \mapsto \gamma(s+\cdot)$, многострукост $\mathcal{M}(x_-, x_+)/\mathbb{R}$ је димензије 0 ако је $p = q+1$. Из Арцела–Асколијеве теореме следи да је $\mathcal{M}(x_-, x_+)/\mathbb{R}$ компактан, дакле коначан. Број тачака овог скупа означавамо са $n(x_-, x_+)$. Дефинишимо гранични оператор ∂ на $Crit_p(f)$ са

$$\partial(x) := \sum_{y \in Crit_{p-1}(f)} n(x,y)y$$

и проширимо га по линеарности на

$$\partial : C_p(f) \to C_{p-1}(f).$$

Може се показати да су многострукости димензије нула међу многострукостима $\mathcal{M}(x,y)$ границе многострукости димензије један. Одатле (будући да граница многострукости димензије један има паран број крајева) лако следи да је

$$\partial \circ \partial = 0.$$

Количнички векторски простор

$$H_*(f) := \frac{\mathrm{Ker}(\partial)}{\mathrm{Im}(\partial)}$$

зове се *Морсова хомологија.* Он не зависи од избора Морсове функције f и метрике на многострукости и изоморфан је сингуларној хомологији $H_*(M, \mathbb{Z}_2)$. Уколико се у (29) узму $\mathbb{Z}-$модули уместо $\mathbb{Z}_2-$векторских простора (при чему треба повести мало више рачуна о оријентацији, али то не представља суштински проблем), добијају се групе изоморфне групама $H_*(M, \mathbb{Z})$.[68]

Флорова теорија

Задатак 83. Доказати да број $1-$периодичних орбита Хамилтоновог система на симплектичкој многостукости M није мањи од Ојлерове карактеристике $\chi(M)$ $(:= \sum_{k=1}^{\dim M} b_k(M)$, где су b_k Бетијеви бројеви).
Упутство: в. Лефшецову теорему о фиксној тачки.[69] ♣

Аналогија једначине (30) за функционал $\mathcal{A}_H$ на простору петљи у симплектичкој многострукости је, имајући у виду Задатак 47

$$\bar{\partial}_J u = -\nabla H(u). \tag{32}$$

Задатак 84. Доказати да смена $u(s,t) \mapsto \tilde{u}(s,t) := \phi_t^H(u(s,t))$ преводи једначину (32) у $\bar{\partial}_{J_1} = 0$. ♢

Доказати да из Задатка 84 следи да је структура многострукости решења негативне градијентне једначине функционала дејства иста као структура многострукости $J-$холоморфних кривих. Уколико је M таква да су многострукости холоморфних кривих (или $0 - \dim$ компоненте тих многострукости) на њој компактне, нпр. ако је $\pi_2(M) = 0$, може се поновити конструкција хомологије као у претходном параграфу. Добијене групе хомологије зову се Флорова хомологија и означавају са $HF_*(M)$. Оне не зависе од избора хамилтонијана и скоро комплексне структуре и изоморфне су групама сингуларне хомологије многострукости M. Као последицу овога, имамо следећу теорему:

Теорема 23. (Флоров доказ Арнолдове хипотезе) *Претпоставимо да је*

$$\pi_2(M) = 0.$$

Тада број контрактибилних периодичних орбита произвољног Хамилтоновог система није мањи од суме Бетијевих бројева многострукости M.

[68] Детаљније в. у J. Milnor, *Morse theory*, Princeton Univ. Press, 1964., J. Milnor, *Lectures on the h−cobordism*, Princeton Univ. Press, 1965., M. Schwarz, *Morse homology*, Birkhäuser, 1993.
[69] в. нпр. R. Bott, L. W. Tu, *Differential forms in algebraic topology*, Springer, 1986., str. 129.

Доказ: Следи из претходне дискусије. $\square$

Приметимо да је ово бољи резултат од Задатка 83.

Претпоставка $\pi_2(M) = 0$ може се отклонити.[70]

Последица 4. *Хомоморфизам*

$$\pi_1(\mathcal{H}(M)) \to \pi_1(M), \quad [\phi_t] \to [\phi_t(x)]$$

је тривијалан. $\square$

20 Геометрија групе симплектоморфизама

Нека је $\mathcal{D}^\omega(M)$ група симплектоморфизама са компактним носачем, $\mathcal{D}^\omega_0(M)$ компонента Id у $\mathcal{D}^\omega(M)$ и $\mathcal{H}(M)$ група Хамилтонових дифеоморфизама са компактним носачем симплектичке многострукости M.

Задатак 85. Доказати да је $\mathcal{H}(M)$ заиста група и да је она нормална подгрупа групе $\mathcal{D}^\omega(M)$. $\heartsuit$

Интересантно је да алгебарска својства групе $\mathcal{H}(M)$ одређују топологију многострукости M: ако је $\mathcal{H}(M_1) \cong \mathcal{H}(M_2)$ (алгебарски), онда је (M, ω_1) симплектоморфно $(M, \lambda\omega_2)$, за неко λ из $\mathbb{R}$ (в. [B]).

Познато је (од '60тих) да је $\mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ контрактибилна многострукост. М. Громов је, у споменутом раду из 1985. године, доказао да је $\mathcal{H}(\mathbb{R}^4)$ контрактибилна. П. Сајдел[71] је добио неке резултате о хомотопским групама $\pi_k(\mathcal{H}(\mathbb{C}P^m \times \mathbb{C}P^n))$; скоро ништа више није познато о хомотопским својствима многострукости $\mathcal{H}(M)$.

У овој глави ћемо навести нека основна својства групе $\mathcal{H}(M)$.

20.1 Флукс хомоморфизам

Нека је M компактна симплектичка многострукост. Означимо са $\widetilde{\mathcal{D}^\omega_0}(M)$ универзално наткривање[72] групе $\mathcal{D}^\omega_0(M)$. *Флукс хомоморфизам*

$$\mathrm{Flux} : \widetilde{\mathcal{D}^\omega_0}(M) \to H^1_{DR}(M) \tag{33}$$

[70] в. нпр. K. Fukaya, K. Ono, *Arnold conjecture and Gromov–Witten invariants for general symplectic manifolds*, 1996.

[71] P. Seidel, *On the group of symplectic automorphisms of* $\mathbb{C}P^m \times \mathbb{C}P^n$, preprint.

[72] Универзално наткривање $\pi : \widetilde{P} \to P$ тополошког простора P је простор хомотопских класа путева $\{\gamma : [0,1] \to X \mid \gamma(0) \text{ фиксирано; } \pi([\gamma]) = \gamma(1)\}$.

је дефинисан са

$$\mathrm{Flux}(\{\psi_t\}) := \int_0^1 [i(X_t)\omega]dt, \tag{34}$$

или, имајући у виду да је $H^1_{DR}(M) \cong \mathrm{Hom}(\pi_1(M), \mathbb{R})$,

$$\mathrm{Flux}(\{\psi_t\})(\gamma) = \int_0^1 \int_{\mathbb{S}^1} \omega(X_t(\gamma(\theta)), \dot\gamma(\theta))d\theta dt. \tag{35}$$

Нека је дато $\gamma \in \pi_1(M)$ и нека је $C := \bigcup_t \psi_t(\gamma)$. Тада је

$$\mathrm{Flux}(\{\psi_t\})(\gamma) = \int_C \omega. \tag{36}$$

Из (36) следи да, за петљу $\{\psi_t\} \in \mathcal{D}^\omega_0(M)$, $(\psi_0 = \psi_1)$, (34) и (35) зависе само да хомотопске класе $[\{\psi_t\}] \in \pi_1(\mathcal{D}^\omega_0(M))$, па је Flux хомоморфизам добро дефинисан као пресликавање (33).

Задатак 86. Доказати да је (33) хомоморфизам.
Упутство: Доказати прво да, ако су ϕ_t и ψ_t генерисани векторским пољима X_t и Y_t, онда је $\psi_t \circ \phi_t$ генерисано векторским пољем $Y_t + \psi_{t*}X_t$. $\diamondsuit$

Задатак 87. Нека је $[\psi_t] \in \pi_1(\widetilde{\mathcal{D}^\omega_0}(M))$, где је ψ_t Хамилтонова петља. Доказати да је $\mathrm{Flux}(\{\psi_t\}) = 0$. $\diamondsuit$

Задатак 88. Доказати да Флукс хомоморфизам има десни инверз

$$s : H^1_{DR}(M) \to \widetilde{\mathcal{D}^\omega_0}(M), \quad \mathrm{Flux} \circ s = \mathrm{Id},$$

одакле следи да је флукс сурјективан.
Упутство: ако X не зависи од времена, $\mathrm{Flux}(\{\psi_t\}) = [i(X_t)\omega]$, а ω је недегенерисана. $\diamondsuit$

Група

$$\mathrm{Flux}(\Gamma) := \mathrm{Flux}(\pi_1(\mathcal{D}^\omega_0(M)))$$

зове се *Флукс група.*
Важи и тврђење обрнуто Задатку 87.[73] Другим речинıма, $\mathrm{Ker}(\mathrm{Flux}) = \mathcal{H}(M)$, па је низ

$$0 \to \mathcal{H}(M) \to \mathcal{D}^\omega_0(M) \to H^1_{DR}(M)/\Gamma \to 0$$

[73] [B].

тачан.
Питање да ли је подгрупа дискретна је важно (о чему говори и следећа теорема) и у општем случају је још увек отворено („Флукс хипотеза”).

Теорема 24. [74]*Нека је M компактна симплектичка многострукост. Следећа тврђења су еквивалентна:*
(i) *$\mathcal{H}(M)$ је подмногострукост у $\mathcal{D}^\omega(M)$.*
(ii) *Група $\mathcal{H}(M)$ је затворена у $\mathcal{D}^\omega(M)$ у C^1-топологији.*
(iii) *Γ је дискретна подгрупа.* □

Познато је да је Γ дискретна ако симплектичка форма дефинише рационалну класу $[\omega] \in H^2(M, \mathbb{R})$. Такође је познато да је γ дискретна ако је

$$\cdot \wedge [\omega^{\wedge(n-1)}] : H^1(M) \to H^{2n-1}(M)$$

изоморфизам. Из Лефшецове теореме (Теорема 10) следи да овај други случај обухвата Келерове многострукости.

20.2 Калабијев хомоморфизам

Нека је M *тачна* симплектичка многострукост, $\omega = -d\theta$.

Задатак 89. Нека је ϕ_t глатка фамилија дифеоморфизама. Доказати

1. ϕ_t је фамилија симплектоморфизама ако и само ако је $1-$форма $\phi_t^*\theta - \theta$ затворена за свако t.

2. ϕ_t је фамилија Хамилтонових дифеоморфизама ако и само ако је $1-$форма $\phi_t^*\theta - \theta$ тачна за свако t. ♢

Калабијев хомоморфизам

$$\mathrm{Cal} : \mathcal{H}(M) \to \mathbb{R} \tag{37}$$

је дефинисан са

$$\mathrm{Cal}(\phi) := -\frac{1}{n+1}\int_M F\omega^n \tag{38}$$

где је F функција са компактним носачем дефинисана са $\phi^*\theta - \theta = dF$ (видети Задатак 89).

[74]За доказ в. [MS1] стр. 323.

Лема 8. *Нека је $\phi_t \in \mathcal{H}(M)$ пут Хамилтонових деифеоморфизама генерисаних Хамилтонијаном H_t, и $\phi_t^*\theta - \theta = dF_t$. Тада је*

1. $\int_M F_t\omega^n = \int_M(\phi_t^*\theta - \theta) \wedge \theta \wedge \omega^{n-1}$;
2. $\frac{d}{dt}\int_M F_t\omega^n = \int_M(i(X_t)\theta - H_t)\omega^n$;
3. $\int_M(i(X_t)\theta - H_t)\omega^n = -(n+1)\int_M H_t\omega^n$.

Задатак 90. Доказати Лему 8.
Упутство: применити Картанову формулу или погледати *[MS1]*, стр. 330–331. ♣

Последица 5. *Ако је фамилија ϕ_t генерисана Хамилтонијаном H_t, онда је*

$$\mathrm{Cal}(\phi) = \int_0^1 \int_M H_t\omega^n.$$

Задатак 91. Доказати Последицу 5. ♠

Последица 6. *Калабијев хоморфизам је добро дефинисан.*

У општем случају (кад M није тачна), уместо (37), (38), Калабијев хомоморфизам је дефинисан као

$$\mathrm{Cal} : \widetilde{\mathcal{H}}(M) \to \mathbb{R}, \quad \mathrm{Cal}(\phi) = \int_0^1 \int_M H_t\omega^n,$$

где су ϕ и H као у Последици 5.

20.3 Хоферова геометрија

Група $\mathcal{H}(M)$ се може посматрати као бесконачнодимензиона Лијева група чија се Лијева алгебра природно идентификује са $C_0^\infty(M)$ (глатке функције са компактним носачем). Свака норма на $C_0^\infty(M)$ даје нам могућност да дефинишемо дужину путева у $\mathcal{H}(M)$. Нека је пут $\{\psi_t\}$ генерисан Хамилтонијаном H_t, тада дефинишемо дужину тог пута са

$$l(\{\psi_t\}) := \int_0^1 \|H_t\| dt.$$

Дефиниција је аналогна дефиницији дужине пута на Римановој многострукости: тангентни вектори на многострукости $\mathcal{H}(M)$ су Хамилтонова векторска поља, а она су идентификована са Хамилтоновим функцијама које их генеришу.

Задатак 92. На ком месту доказ из Риманове геометрије да норма на тангентном простору генерише функцију растојања на многострускости (као инфимум дужине путева) не пролази у случају бесконачнодимензионих многострукости? $\diamondsuit$

Ако за норму на $C_0^\infty(M)$ узмемо L^p-норму за $1 \leq p < +\infty$, индуковано растојање

$$\rho_p(\psi, \phi) := \inf \int_0^1 \|H_t\|_p \, dt$$

(инфимум је узет по свим Хамилтонијанима који генеришу путеве у $\mathcal{H}(M)$ који спајају ψ и ϕ) је дегенерисамо и задовољава[75]

$$\rho_p(\mathrm{Id}, \psi) = Vol(M)|\operatorname{Cal}(\psi)|.$$

Норма

$$\|H\|_\infty := \max_{x \in M} H_t(x) - \min_{x \in M} H_t(x)$$

генерише растојање ρ_∞ на $\mathcal{H}(M)$, звано *Хоферово растојање.* Коришћењем Леме 2 лако се доказује да је ρ_∞ биинваријантна (у односу на дејство групе Хамилтонових дифеоморфизама) псеудо метрика. Нетривијалан резултат је да је ρ_∞ заиста метрика.[76]
Енергија раздвајања компактног скупа $K \subset M$ је величина

$$e(K) := \inf\{\rho_\infty(\mathrm{Id}, \psi) \mid \psi \in \mathcal{H}(M), \, \psi(K) \cap K = \emptyset\}.$$

За некомпактан скуп $A \subset M$ енергија раздвајања је

$$e(A) := \sup\{e(K) \mid K \subset A \text{ компактан}\}.$$

Много тога о Хоферовој геометрији још увек је непознато: да ли је дијаметар групе $\mathcal{H}(M)$ увек бесконачан,[77] да ли промена симплектичке форме $\omega \mapsto \lambda\omega$ мења Хоферову геометрију на $\mathcal{H}(M)$, да ли је Хоферова метрика практично једина метрика индукована дужином путева (унутрашња метрика), итд.

[75] Ya. Eliashberg, L. Polterovich, *Bi-invariant metrics on the group of Hamiltonian diffeomorphisms,* International J. Math. 4, 727–738, 1993.

[76] Недегенерисаност овог растојања за $M = \mathbb{R}^{2n}$ доказана је у H. Hofer, *On the topological properties of symplectic maps*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, 115 a, 25–38, 1990, а у општем случају у F. Lalonde, D. McDuff, *The geometry of symplectic energy*, Annals of Math., 141, 349–371, 1995.

[77] За површи одговор је потврдан, али крајње нетривијалан.

20.4 Симплектички капацитети

Симплектички капацитет c на $\mathbb{R}^{2n}$ је функција која придружује скупу $A \subset \mathbb{R}^{2n}$ ненегативан број или $+\infty$ и задовољава следеће аксиоме
монотоност Ако постоји симплектичко утапање $\psi : A \hookrightarrow B$ онда је

$$c(A) \leq C(B).$$

конформност $c(\lambda A) = \lambda^2 c(A)$ за $\lambda \in \mathbb{R}$.
нетривијалност $c(B^{2n}(1)) = \pi = C(Z(1))$, где је $B^{2n}(1)$ лопта полупречника 1 и $Z(1)$ цилиндар $B^2(1) \times \mathbb{C}^{n-1}$.
слаба нетривијалност $c(B^{2n}(1)) > 0$ и $c(Z(1)) < +\infty$.

Егзистенција симплектичких капацитета није очигледна.

Задатак 93. Доказати да

$$\bar{c}(A) := \sup\{\pi r^2 \mid B^{2n}(r) \overset{simpl}{\hookrightarrow} A\}$$

(„Громовљев радијус" или „Громовљева ширина")[78] и

$$\underline{c}(A) := \inf\{\pi r^2 \mid A \overset{simpl}{\hookrightarrow} B^2(r) \times \mathbb{C}^{n-1}\}$$

дефинишу симплектичке капацитете. ♢

Задатак 94. Доказати да сваки симплектички капацитет c задовољава неједнакост

$$\bar{c} \leq c \leq \underline{c},$$

где су $\bar{c}$, $\underline{c}$ капацитети из Задатка 93. ♢

Значај симплектичких капацитета илустроваћемо следећом теоремом.

Теорема 25. [79]*Нека је $\psi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ дифеоморфизам и c симплектички капацитет. Тада су следећа тврђења еквивалентна:*
(i) *ψ чува капацитет елипсоида.*
(ii) *$\psi^*(d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q}) = \pm d\mathbf{p} \wedge d\mathbf{q}$.* □

---

[78]тј. πr^2 где је r полупречик највеће лопте која се може симплектички утопити у A.

[79]Ya. Eliashberg, *Rigidity of symplectic and contact structures*, Међународнa тополошка конференција у Лењинграду 1982, *A theorem of the structure of the wave fronts and its application to symplectic topology*, Funct. Analysis and its App., 21, 65–72, 1987; I. Ekeland, H. Hofer, *Symplectic topology and Hamiltonian dynamics*, Math. Zeit., 200, 355–378, 1989.

Теорема 25 даје C^0-карактеризацију симплектичких дифеоморфизама; из ње следи

Последица 7. *Група симплектоморфизама је C^0- затворена.* □

Приметимо да је Последица 7 необичан резултат: C^1-својство (симплектичност) очувава се C^0-лимесима. Другим речима, симплектичност само привидно подразумева изводе. Ово је још један разлог да се каже да је симплектичка геометрија тополошка у основи (в. главу 5).
Недегенерисаност Хоферове метрике је последица следеће теореме.

Теорема 26. [80] *Енергија раздвајања задовољава*

$$e(B^{2n}(r)) = e(Z(r)) = \pi r^2, \quad \bar{c}(A) \leq e(A) \leq \underline{c}(A).$$

□

Задатак 95. Доказати да из Теореме 26 следи недегенерисаност Хоферове метрике. ♠

Задатак 96. Да ли је енергија раздвајања симплектички капацитет? ♡

21 Контактне многострукости

Нека је P многострукост димензије $2n+1$. Контактна структура на P је глатка фамилија $\xi \subset TP$ тангентних хиперпростора (глатка $2n-$дистрибуција) која је максимално неинтеграбилна у следећем смислу.

Задатак 97. Нека је дистрибуција ξ локално задата $1-$формом α; $\xi = \mathrm{Ker}(\alpha)$. Доказати да је ξ интеграбилна ако и само ако је $\alpha \wedge d\alpha = 0$.
Упутство: применити

$$d\alpha(X,Y) = X\alpha(Y) - Y\alpha(X) - \alpha([X,Y]) \tag{39}$$

и Фробенијусову теорему. ♠

[80] Доказ који следи F. Lalonde, D. McDuff, *The geometry of symplectic energy,* Annals of Math., 141, 349–371, 1995, скициран је у [MS1], стр. 384; доказ који следи H. Hofer, *On the topological properties of symplectic maps*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, 115 A, 25–38, 1990, в. у [HZ].

Диструбуција је *максимално неинтеграбилна* ако је

$$\alpha \wedge (d\alpha)^{\wedge n} \neq 0. \tag{40}$$

Форма α која задовољава (40) зове се *контактна форма*. Тада 2−форма $d\alpha$ дефинише линеарну симплектичку структуру (билинеарну кососиметричну форму) на сваком од потпростора дистрибуције ξ.
За сваку контактну форму α постоји јединствено векторско поље X_α дефинисано са

$$i(Y)d\alpha = 0, \quad \alpha(Y) = 1.$$

Такво векторско поље назива се *Рибово векторско поље*. Њиме дефинисани дифеоморфизам чува форму α, а њиме и контактну структуру ξ (зашто?). Рибово векторско поље зависи од избора контактне форме α, а не само од контактне структуре ξ: ако је $h : M \to \mathbb{R}$ функција, форме α и $e^h\alpha$ дефинишу исту контактну структуру, а њихова Рибова векторска поља се разликују.

Примери:

- $\mathbb{R}^{2n+1}$ са контактном формом $\alpha = dz + \sum_{k=1}^n y_k dx_k$;
- Простор 1−струја: $J^1M = T^*M \times \mathbb{R}$ са контактном формом $dt - \theta$ где је θ канонска 1−форма на T^*M.

Из услова неинтеграбилности (40) следи да интегралне многострукости диструбуције ξ не могу бити максималне димензије; следећа лема даје прецизнију информацију.

Лема 9. *Нека је $L \subset P$ интегрална подмногострукост дистрибуције ξ и $p \in L$. Тада је T_pL изотропан потпростор симплектичког векторског простора $(\xi_p, d\alpha(p))$.*

Доказ: Ако су X, Y векторска поља у TL, онда је

$$i(X)\alpha = i(Y)\alpha = i([X, Y])\alpha = 0,$$

а одатле и из (39) следи $d\alpha(X, Y) = 0$. □

Задатак 98. Доказати да је у Леми 9 $\dim L \leq n$. ♠

Ако је у Леми 9 $\dim L = n$, L се назива *Лежандровом* подногострукошћу. Дифеоморфизам који чува дистрибуцију ξ назива се *контактоморфизам*. При томе није обавезно $\psi^*\alpha = \alpha$: дифеоморфизам ψ је контактоморфизам ако и само ако је $\psi^*\alpha = e^h\alpha$ за неку функцију h на M. Векторско поље које генерише контактоморфизам зове се *контактно векторско поље*. Следећа лема је контактна аналогија Хамилтонових једначина.

Лема 10. *Нека је Y Рибово векторско поље контактне форме α. Векторско поље X је контактно ако и само ако постоји функција H таква да је*

$$i(X)\alpha = -H, \quad i(X)d\alpha = dH - (i(Y)dH)\alpha.$$

Обрнуто, свака функција H на овај начин генерише јединствено контактно векторко поље. $\square$

Симплектизација контактне многострукости P је симплектичка многострукост $P \times \mathbb{R}$ са симплектичком формом $\omega := d(e^t\alpha)$.

Задатак 99. Доказати да је подмногострукост $L \subset P$ Лежандрова подмногострукост ако и само ако је $L \times \mathbb{R}$ Лагранжева подмногострукост симплектизације $P \times \mathbb{R}$. $\diamondsuit$

Подмногострукост $j : L \to T^*M$ је тачна Лагранжева имерзија ако и само ако се j подиже до Лежандрове имерзије $\tilde{j} : L \to J^1M := T^*M \times \mathbb{R}$; ако је $J^*\theta = dS$, онда је $\tilde{j}(x) := (j(x), S(x))$ дефинише тражену имерзију. Подмногострукости $\tilde{j}(L)$ и $j(L)$ су тада потпуно одређене пројекцијом $\pi \circ j : L \to M \times \mathbb{R}$ (зашто?). Скуп

$$W := \pi \circ j(L) \subset M \times \mathbb{R}$$

зове се *таласни фронт* подмногострукости L.

Задатак 100. Прочитати §46 (Хајгенсов принцип) у Арнолдовој књизи [А]. $\clubsuit$

Слично симплектичким, и контактне многострукости су локално изоморфне:

Теорема 27. (Дарбуова теорема) *Свака контактна многострукост је локално изоморфна контактној многострукости $\mathbb{R}^{2n+1}$ са контактном формом $\alpha = dz + \sum_{k=1}^{n} y_k dx_k$.*

Доказ: следи из Дарбуове теореме за симплектичке многострукости примењене на симплектизацију.[81] $\square$

Теорема 28. *Нека је M симплектичка многострукост и $P \subset M$ компактна подмногострукост кодимензије 1. Следећа тврђења су еквивалентна.*
(i) *Постоји контактна форма α на P која задовољава $d\alpha = \omega|_P$.*
(ii) *Постоји околина $V \supset P$ и векторско поље $X : V \to TM$ трансверзално на P, такво да је*

$$i(X)\omega|_P = \alpha, \quad L_X\omega = \omega.$$

$\square$

Векторско поље из претходне теореме зове се *Лиувилово векторско поље*, а хиперповрши симплектичких многострукости које задовољавају тврђења теореме зову се *хиперповрши контактног типа*.
Ако је M симплектичка многострукост и $P \subset M$ произвољна хиперповрш, онда на TP постоји истакнуто векторско поље $\mathrm{Ker}(\omega)$. Интегралне криве тог векторског поља називају се *карактеристике* хиперповрши P. Разматрајући услове под којима неки динамички системи имају периодичне орбите, Ален Веинстејн је 1979. године поставио хипотезу да на свакој хиперповрши *контактног типа* постоји затворена карактеристика.[82] Хипотеза је потврдно решена у случају хиперповрши у $\mathbb{C}^n$ и у још неким специјалним случајевима; у општем случају је још увек отворена.

[81] В. додатак о контактним многострукостима у [A] за детаље и даљу дискусију о контактној геометрији.
[82] A. Weinstein, *On the hypothesis of Rabinovitz's periodic orbits theorems*, Journal of Differential Equations, 33, 353–358, 1979.

22 Литература

Стрпљиви студент који је стигао до ове тачке без сумње осећа неодољиву жељу да настави самостално да чита о симплектичком многострукостима и њиховим везама са разним областима математике. Следи некомплетан списак литературе.

Симплектичка топологија

[MS1] McDuff, D., Salamon, D., *Introduction to symplectic topology*, 2nd ed., Oxford Sci. Pub. 1998.

Геометрија групе симплектоморфизама

[B] Banyaga, A., *The structure of classical diffeomorphism groups*, Mathematics and its applications 400, Kluwer Academic Publisher's Group, 1997.

[HZ] Hofer, H., Zehnder, E., *Symplectic invariants and hamiltonian dynamics*, Birkhäuser, 1994.

[P] Polterovich, L., *The geometry of the group of symplectic diffeomorphisms*, Birkhäuser, 2001.

Везе са класичном механиком

[AM] Abraham, R., Marsden, J. E., *Foundation of mechanics*, Addison Wesley, 1977.

[A] Arnold, V. I. *Mathematical methods in classical mechanics*, Springer–Verlag, 1978.

[LM] Libermann, M., Marle, C., *Symplectic geometry and analytical mechanics*, Reidel, Dodrecht, 1987.

Везе са интегралним и диференцијалним операторима

[GS1] Gullemin, V., Sternberg, S., *Geometric asymptotics*, AMS Surveys, 1977.

[H] Hörmander, L., *The analysis of linear partial differential operators*, Vol. III, Springer–Verlag, 1985.

Квантизација и математичка физика

[GS2] Gullemin, V., Sternberg, S., *Symplectic techniques in physics*, Cambridge Univ. Press, 1984.

[W] Weinstein, A., *Lectures on the geometry of quantization*, Berkeley Math. Lec. Notes, AMS, 1997.

Холоморфне криве

[AL] Audin, M., Lafontaine, J. (ed.), *Holomorphic curves in symplectic geometry*, Birkhäuser, 1994.

[G] Gromov, M., *Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math., **82**, 307–347, 1985.

[MS2] McDuff, D., Salamon, D., *J–holomorphic Curves and Quantum Cohomology*, University Lecture Series AMS, 1994.

Комплексна геометрија

[GH] Griffiths, P., Harris, J., *Principles od algebraic geometry*, Willey Calssic Library, 1978.