Глобална анализа 2010. Коментари уз 4, 5. и 6. домаћи задатак

Четврти домаћи задатак

(1) Ово је задатак о Мајер – Вијеторисовом низу.

(2) Да ли id може да буде хомотопно неком пресликавању које није сурјекција? Шта је степен пресликавања које није сурјективно?

(3) (б) Степен је „број елемената” скупа $f^{-1}(y_0)$ за регуларну вредност y_0; уз помоћ Сардове теореме то y_0 можемо згодно да изаберемо, тако да је (уз малу злоупотребу нотације) $(Sf)^{-1}(y_0) = f^{-1}(y_0)$.

(в) Овде може да буде од користи **Фројденталова теорема**: *Суспензија индукује преслика вање* $S_* : \pi_k(X) \to \pi_{k+1}(SX)$ *који је изоморфизам за* $k \leq 2n$ *и епиморфизам за* $k = 2n$. Индукцијом, уз примену (б), видимо да је довољно доказати тврђење за $n = 1$. Схватити пресликавање $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ као периодично пресликавање $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и евоцирати успомене на Анализу 1...

(г) Где генераторе групе $H_1(\mathbb{T}^2)$ (или $\pi_1(\mathbb{T}^2)$) пресликава f_*, а где id_*?

(4) Ово је задатак о тачном низу пара и 5–леми.

(5) Захваљујући постојању ретракта тачан хомолошки низ пара се распада на више кратких тачних низова који се раздвајају (видети 469. страну). Ова идеја у другом контексту (хомотопских група) јавља се у Примеру 10 на 489. страни.

(6) Ово је мало обнављање Алгебарске топологије; све следи директно из дефиниција.

(7) Општа топологија.

Пети домаћи задатак

(1) (а) Доказати да одавде следи да Лијева група има тривијално тангентно раслојење. (Многострукости које имају тривијално тангентно раслојење називају се *паралелизабилним многострукостима.*) Урадити 22. задатак на 198. страни.

(б) Ако је $E \to \mathbb{S}^1$ ранга 1, онда је оно или цилиндар или Мебијусова трака (или је тривијално или није). Ако је E ранга $k > 1$, онда је $\dim E > \dim \mathbb{S}^1 + \dim \mathbb{S}^1$, па из Теореме о трансверзалности следи да постоји сечење $s : \mathbb{S}^1 \mapsto E$ такво да је $s(\mathbb{S}^1)$ у трансверзалном положају (читај: дисјунктно) са нултим сечењем. Одатле, уз помоћ (а), следи да је E директна сума тривијалног раслојења ранга 1 и раслојења E_1 ранга $k - 1$. Ако је $k - 1 > 1$ поновимо овај поступак. Закључити на крају: свако раслојење над $\mathbb{S}^1$ је или тривијално, или директна сума тривијалног и Мебијусове траке.

(2) (а) и (б) Раслојења ранга 1 је оријентабилно ако и само ако је тривијално. За многострукости ранга већег од 1 ово није тачно (дати контрапример), мада (наравно) важи смер „ако”.

(в) $\nu(\{x \mid f(x) = y_0\}) \ni \nabla f \neq 0$.

Коментар о оријентабилности: Требало би, независно од овог задатка, знати и разумети следеће чињенице (доказане на разним местима у књизи – у §4 и §6 у Трећој глави, у Теореми 13 на стр. 480...):

– Оријентабилно раслојење над оријентабилном базом је оријентабилна многострукост.
– (Ко)тангентно раслојење је оријентабилна многострукост (али не увек оријентабилно раслојење!).
– Следеће дефиниције оријентабилности n–димензионе многострукости N су еквивалентне:
    - $\spadesuit$ постоји n–форма Ω на N која нигде није нула (ова форма зове се *формом оријентације* или *запремине*);
    - $\diamondsuit$ постоји атлас $(U_\lambda, \psi_\lambda)$ на N, такав да $(\psi_{\lambda_1} \circ \psi_{\lambda_2}^{-1})_*$ чува оријентацију у $\mathbb{R}^n$ (тј. има позитиван јакобијан).
    - $\heartsuit$ $TN \to N$ је оријентабилно раслојење;

  Ако је N компактна и повезана, онда су $\spadesuit, \diamondsuit, \heartsuit$ еквивалентни и са
    - $\clubsuit^{\mathbb{R}}$ $H^n_{DR}(N) = \mathbb{R}$;
    - $\clubsuit^{\mathbb{Z}}$ $H^n(N;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$;
    - $\clubsuit_{\mathbb{Z}}$ $H_n(N;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.
– Оријентација је неопходна за интеграцију;
– Свака многострукост има оријентабилно дволисно наткривање.
– Крај ∂M оријентабилне многострукости M је оријентабилна многострукост (у општем случају, крај не мора да буде оријентабилна многострукост, иако постоје мотиви да се посумња на то – видети Задатак 29 и дискусију пре њега на стр. 540–541).

Задатак: Доказати да је

$$\Omega = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k+1} x_k dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_k} \wedge \cdots \wedge dx_{n+1}$$

(симбол $\widehat{\ }$, тзв. *узималица*, означава да је члан под њом испуштен из израза) форма запремине на сфери $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. (Упоредити са Задатком 7 у Првом домаћем у светлу коментара на Задатак 12 у Нултом домаћем.)

(3) Ово је задатак из тачних низова хомотопских група раслојења (видети Теорему 2 на стр. 487 и примере иза ње).

(4) (а) и (б) Није тешко израчунати хомолошке и (до одређене димензије) хомотопске групе пројективних простора и Декартових производа осумњичених да су им хомотопски еквивалентни; питање је само шта брже води до (негативног) одговора. Није лоше пробати и једно и друго у сваком случају (чак и ако први покушај води до решења). Резултат под (б) показује да фибрација из Задатка 3а није тривијална.
(в) и (г) Погледати стр. 113-114.
(д) $\mathbb{R}P^3$ може да се схвати као тродимензиона лопта пречника π са идентификованим антиподалним тачкама граничне сфере. Тако се тачке многострукости $\mathbb{R}P^3$ могу схватити као тачке дужи $[-\pi, \pi]$ на правама кроз координатни почетак, при чему $-\pi$ и π одговарају истој тачки. Баш као што се и ротације (тј. елементи групе $SO(3)$ могу схватити као пар (оса ротације, угао из интервала $[-\pi, \pi]$), при чему нема разлике између ротације за π и $-\pi$.

(5) (а) је најлакше израчунати користећи CW декомпозицију пројективних простора и теорему о хомологији CW комплекса; (б-г) је вежба тачних низова хомотопских група раслојења.

(6) Мајер - Вијеторисов низ, Кинетова формула, тачни низови хомотопских група раслојења (овде само тривијалних, тј. $F \times B$; доказати да је $\pi_k(F \times B) = \pi_k(F) \oplus \pi_k(B)$). За (в): доказати да изоморфизам

$$f^* : H^{m+n}(\mathbb{S}^m \vee \mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^{m+n}) \to H^{m+n}(\mathbb{S}^{m+n})$$

комутира са производом $\wedge$ (= кохомолошким „шољица производом" $\cup$), па је производ кохомолошких класа степена m и n у $\mathbb{S}^m \vee \mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^{m+n}$ једнак нули (за разлику од производа класа истог степена у $\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n$).

(7) (а) Из постојања f следи да M и N имају исту димензију. Искористити адут ♠ из коментара Задатка 10. Шта је $f^*\Omega$?

(б) Ако запремину базе меримо формом Ω, а запремину наткривања формом $\pi^*\Omega$, онда је њихов однос једнак броју слојева (Теорема о вези степена и интеграла), а он се може изразити у терминима фундаменталних група (видети §4 у Трећој глави).

Варијација на тему (б): реални пројективни простор је база наткривања

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_2 & \to & \mathbb{S}^n \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{R}P^n. \end{array}$$

За које n је $\mathbb{R}P^n$ оријентабилна многострукост? Да ли за те n постоји природна форма запремине на $\mathbb{R}P^n$, и колика је запремина пројективног простора мерена том формом?

Комплексна аналогија овог примера је раслојење

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{S}^1 & \to & \mathbb{S}^{2n+1} \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{C}P^n. \end{array}$$

Стандардна еуклидска метрика на сфери је инваријантна у односу на $\mathbb{S}^1$ дејство, па индукује метрику на $\mathbb{C}P^n$. Ако запремине меримо формама сагласним са том метриком (видети Задатак 8 на стр. 174), из Фубинијеве теореме следи

$$\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{2n+1}) = 2\pi \mathrm{Vol}(\mathbb{C}P^n).$$

Специјално, $\mathrm{Vol}(\mathbb{C}P^1) = \pi$ (што смо могли и да очекујемо, имајући у виду Задатак 4 (г)).

Шести домаћи задатак

(1) $PD(X) \wedge PD(Y) = (-1)^{\dim X \cdot \dim Y} PD(Y) \wedge PD(X)$ (антикомутативност спољашњег множења $\wedge$), па је $X \cdot Y = (-1)^{\dim X \cdot \dim Y} Y \cdot X$.

(2) (б) Због димензија множење

$$\wedge : H^r(\mathbb{T}^2) \otimes H^s(\mathbb{T}^2) \to H^{r+s}(\mathbb{T}^2)$$

се лако описује за све r, s сем $r = s = 1$; да бисмо га описали у том случају можемо да искористимо $PD(R \cap S) = PD(R) \wedge PD(S)$ и пређемо са кохомологије на хомологију, где се ствари виде геометријски, и искористимо везу Поенкареовог дуала и индекса пресека и рачун из (а).

(в) *Први начин*: приметити да из тачног низа хомотопских група тривијалног раслојења $F \times B$ следи $\pi_k(F \times B) = \pi_k(F) \oplus \pi_k(B)$. *Други начин*: Из тачног низа хомотопских група наткривања (тј. раслојења са дискретним слојем) $\widehat{M} \to M$ следи $\pi_k(\widehat{M}) = \pi_k(M)$ за $k > 1$, а торус се наткрива са $\mathbb{R}^2$.

(3) Овај задатак може (и треба!) да се уради на два начина:
Први: Нека је $p \in \partial M$ регуларна тачка несуђене ретракције r. Скуп $r^{-1}(p)$ је једнодимензиона[1] многострукост са границом многострукости M. Један њен крај је тачка p. Где је други? Овај задатак је доказан (као лема) на овај начин у Милноровој књизи „Топологија са диференцијабилне тачке гледишта”.
Други: Погледати Лему 2 на 165. страни у „Анализи на многострукостима”. Аргумент из њеног доказа може да се уопшти на оно што овде доказујемо, уз помоћ Теореме 3 на 537. страни (ако M није оријентабилна она и даље важи, само са $\mathbb{Z}_2$ коефицијентима), тачног низа пара $(M, \partial M)$ и Теореме 13 на 480. страни.

(4) Израчунати $\chi(\mathbb{S}^n)$. Сфера непарне димензије $2n-1$ се налази у $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$, а у комплексном простору множење са i је ротација за $\frac{\pi}{2}$, тако да је $i\frac{\partial}{\partial r} \in T\mathbb{S}^{2n-1}$. Ово може да се искористи и за (а) и за (б).

(5) f_* на $H_n(\mathbb{S}^n)$ је описано помоћу степена, па овде можемо да применимо Лефшецову теорему о фиксним тачкама.

(6) Овај задатак је сличан претходном; од користи може да буде и Хопфова теорема (сетити се Четвртог домаћег задатка).

(7) За више о Серовим фибрацијама погледати стр. 485–487. Упоредити овај задатак са 8. задатком у Другом домаћем.

[1] Пошто је $\dim \partial M = \dim M - 1$. Обратити пажњу на ово, ∂M није исто што и *тополошка граница*; нпр. диск $D = \{z \in \mathrm{C} \mid |z| \leq 1\}$ је многострукост са границом, док пробушени диск $D \setminus \{0\}$ (чија је тополошка граница $\{0\} \cup \mathbb{S}^1$) није (видети стр. 174–175.)