- `УЗ ЗАДАТАК 1 У НУЛТОМ ДОМАЋЕМ:` Погледати рад М. Левија и С. Табачникова на сајту www.math.psu.edu/tabachni/prints/bicycle9.pdf
- `УЗ ЗАДАТКЕ 2, 3 И 11 у НУЛТОМ ДОМАЋЕМ:` Погледати стр. 207–209 у књизи и Задатке 6–8 на стр. 209–210.
- `Уз ЗАДАТАК 12 (а) И (б) У НУЛТОМ ДОМАЋЕМ:` Свака 1–форма η^1 једнозначно дефинише векторско поље $\mathbf{F}$ такво да важи $\eta^1 = \langle \mathbf{F}, \cdot \rangle$ (Рисова теорема о репрезентацији линеарних функционала). Доказати да свака диференцијална 2–форма η^2 у $\mathbb{R}^3$ једнозначно дефинише векторско поље $\mathbf{F}$ такво да је

$$\eta^2(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{X} \times \mathbf{Y}.$$

[Упутство: десна страна свакако дефинише диференцијалну 2–форму (зашто?); треба показати да су све диференцијалне 2–форме у $\mathbb{R}^3$ тог облика. Која је димензија простора свих билинеарних пресликавања на десној (левој) страни?]

Видимо да је овде за инваријантну (независну од координата) дефиницију градијента употребљен скаларни производ. Дакле, градијент функције може да се дефинише на свакој Римановој многострукости. Та дефиниција зависи од Риманове метрике. *ЗАДАТАК: Наћи координатни запис градијента функције у хиперболичкој метрици.* (Видети Пример 2 на 115. страни.)

За дефиницију дивергенције у $\mathbb{R}^3$ у овом задатку је употребљен мешовити производ. Постојање овог производа је специфичност тродимензионог еуклидског простора, јер ту постоји векторски производ. Доказати да из постојања векторског производа следи постојање *канонске* оријентације на $\mathbb{R}^3$. И обрнуто, ако је дата оријентација на $\mathbb{R}^3$, векторски производ је једнозначно дефинисан. Доказати да се дивергенција може дефинисати на свакој оријентисаној многострукости на следећи начин. Нека је Ω форма оријентације (запремине) на многострукости M. Нека је X векторско поље на M и $\psi_t : M \to M$ једнопараметарска фамилија дифеоморфизама дефинисана диференцијалном једначином

$$\frac{d\psi_t(x)}{dt} = X(\psi_t(x)), \quad \psi_0 = \mathrm{id}$$

(видети Теорему 6 на стр. 95 и Тврђење 2 на стр. 96). Доказати да је дивергенција векторског поља X добро дефинисана са

$$d(X \lrcorner \Omega) = \mathrm{div}(X)\, \Omega.$$

Доказати да векторско поље X задовољава $\mathrm{div}(X) = 0$ ако и само ако њиме генерисана једнопараметарска фамилија дифеоморфизама чува запремину.

Дакле, градијент зависи од Риманове метрике, а дивергенција од форме оријентације. Упоредити ове дефиниције са Задатком 3 на 391. страни, уз помоћ Задатка 8 на 174. страни.

- `Уз ЗАДАТАК 12 (е) У НУЛТОМ ДОМАЋЕМ:` Нека је V област у $\mathbb{R}^3$, а D област у $\mathbb{R}^2$.
  (а) Доказати
  $$\int_{\partial V} u\nabla u \cdot d\mathbf{S} = \int_V (u\Delta u + |\nabla u|^2)\, dV.$$
  (б) Доказати
  $$\int_{\partial V} \nabla u \cdot d\mathbf{S} = \int_V \Delta u\, dV$$
  (в) Доказати следећу *Теорему јединствености*: Ако је функција u хармонијска у области V (тј. задовољава Лапласову једначину $\Delta u = 0$) и на граници ∂V је или $u = 0$ или $D_n u = 0$ где је D_n извод у правцу нормале на ∂V, онда је $u \equiv C$ за неку константу C.
  (г) Доказати да ако је хармонијска функција $u : D \to \mathbb{R}$ једнака нули на скупу који има тачку нагомилавања, онда је она идентички једнака нули.
  (д) Доказати да је ограничена хармонијска функција $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ константна (*Лиувилова теорема* за хармонијске функције).
  (ђ) Доказати да је хармонијска функција која достиже максимум у унутрашњој тачки домена D константна (*Принцип максимума* за хармонијске функције).
  (е) Уопштење Лапласове је Пуасонова једначина: Пример 9 на стр. 179 и (векторска верзија) Пример 3 на стр. 190.
  (ж) Изразити Лапласијан у хиперболичкој равни (хиперболичка метрика и форма запремине дати су у Задатку 8 на 174. страни).
- `УЗ ЗАДАТКЕ 2 (б) И 7 У ПРВОМ ДОМАЋЕМ:` Погледати коментар уз 12. задатак у Нултом домаћем.
- `УЗ ЗАДАТАК 4 У ПРВОМ ДОМАЋЕМ:` Пошто је
  $$\operatorname{codim} V \cap W \le \operatorname{codim} V + \operatorname{codim} W$$
  не умањује се општост ако се претпостави да је
  $$H_1 = \{x_n = 0\} \quad \text{и} \quad H_0 \cap H_1 = \{x_{n-1} = x_n = 0\}.$$
  Нека је $\pi : D_0 \to D_1$ ортогонална пројекција. Тада је ортонормирана база $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial}{\partial x_{n-2}}, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}}$ тангентног простора $T_{\pi(p)}D_1$ слика базе $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots \frac{\partial}{\partial x_{n-2}}, X$ тангентног простора $T_p D_0$ при пресликавању $\pi_*(p)$ ако је $\langle X, \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \rangle = \cos\alpha$, па је однос детерминанти о којима је реч у Задатку 8 на 174. страни $\cos\alpha$.
- `УЗ ЗАДАТАК 3 У ПРВОМ ДОМАЋЕМ:` Израчунати површину закривљеног правоугаоника између два меридијана и две паралеле на торусу $\mathbb{T}^2$ реализованом као
  (а) ротациона површ у $\mathbb{R}^3$
  (б) $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^4$
  у односу на форме површине индуковане еуклидском метриком амбијентног простора, у смислу Задатка 8 на 174. страни.
- `УЗ ЗАДАТАК 6 У ПРВОМ ДОМАЋЕМ:` Погледати Пример 3 на стр. 156–157. Аргумент у издвојеној формули на врху 157. стране је погрешан (зашто?); исправити га (тј. правилно применити Стоксову теорему).