Глобална анализа 2010. **Пети домаћи задатак**

(1) (а) Доказати да је векторско раслојење $\pi : E \to M$ ранга k тривијално ако и само ако има k сечења $s_j : M \to E$, $j = 1, \dots, k$ која су линеарно независна у свакој тачки $x \in M$.
(б) Описати сва векторска раслојења $\pi : E \to \mathbb{S}^1$.

(2) (а) Доказати да је хиперповрш $S \subset \mathbb{R}^n$ оријентабилна ако и само ако је нормално раслојење νS тривијално.
(б) Да ли постоји многострукост M и подмногострукост $S \subset M$ таква да је νS тривијално раслојење, а S неоријентабилна?
(в) Нека је $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ глатка функција и $y_0 \in \mathbb{R}$ њена регуларна вредност. Доказати да је скуп решења једначине $f(x_1, \dots, x_n) = y_0$ оријентабилна многострукост.
(г) Да ли постоје многострукост M и функција $f : M \to \mathbb{R}$ такве да је скуп

$$N = \{x \in M \mid f(x) = y_0\} \subset M$$

неоријентабилна многострукост?

(3) (а) Доказати да је $\mathbb{R}P^3$ фибрација над $\mathbb{S}^2$ са слојем $\mathbb{S}^1$. Израчунати $\pi_3(\mathbb{S}^2)$ и $\pi_2(\mathbb{R}P^2)$.
(б) Доказати да је Клајнова флаша фибрација са базом $\mathbb{S}^1$ и слојем $\mathbb{S}^1$. Израчунати хомотопске и хомолошке групе Клајнове флаше.

(4) (а) Доказати $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^4 \setminus \{*\} \simeq \mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^4$. Да ли је $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^4 \simeq \mathbb{C}P^3$?
(б) Да ли је $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2 \simeq \mathbb{R}P^3$? (Упоредити са Задатком 3.)
(в) Доказати $\mathbb{S}^{n-1} \approx O(n)/O(n-1) \approx SO(n)/SO(n-1)$.
(г) Доказати $\mathbb{R}P^1 \approx \mathbb{S}^1$, $\mathbb{C}P^1 \approx \mathbb{S}^2$, $\mathbb{H}P^1 \approx \mathbb{S}^4$;
(д) Доказати $\mathbb{R}P^3 \approx SO(3)$, $SU(2) \approx \mathbb{S}^3$.

(5) Израчунати
(а) хомологије пројективних простора $\mathbb{C}P^n$ и $\mathbb{R}P^n$;
(б) $\pi_1(\mathbb{R}P^n)$ и $\pi_1(\mathbb{C}P^n)$;
(в) $\pi_2(\mathbb{R}P^3)$ и $\pi_3(\mathbb{R}P^2)$;
(г) $\pi_2(\mathbb{C}P^n)$.

(6) (а) Доказати да простори $\mathbb{R}P^n \times \mathbb{S}^m$ и $\mathbb{R}P^m \times \mathbb{S}^n$ за $m \neq n$ и $m, n > 1$ имају исте хомотопске, а различите хомолошке групе.
(б) Доказати да простори $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ и $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$ имају исте хомолошке, а различите хомотопске групе.
(в) Доказати да простори $\mathbb{S}^m \vee \mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^{m+n}$ и $\mathbb{S}^m \times \mathbb{S}^n$ имају исте (ко)хомолошке групе, али да немају исте кохомолошке прстенове, одакле следи да нису хомотопски еквивалентни.
(г) Да ли су многострукости $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^4 \times \cdots \times \mathbb{S}^{2n}$ и $\mathbb{C}P^{n(n+1)/2}$ хомотопски еквивалентне?

(7) Нека је M оријентабилна многострукост.
(а) Ако постоји сурјекција $f : N \to M$ која је *локални дифеоморфизам* (тј. $(\forall x \in M)(\exists U \ni x)$ такав да је $f|_U : U \to f(U)$ дифеоморфизам), доказати да је N оријентабилна многострукост.
(б) Ако је $\pi : \widetilde{M} \to M$ наткривање, доказати да је $\widetilde{M}$ оријентабилна многострукост. Наћи однос запремина многострукости M и $\widetilde{M}$ у терминима њихових фундаменталних група.