

- (1) Нека је C елипса по којој раван $z = 2x + 3y$ сече цилиндар $x^2 + y^2 = 12$, оријентисана позитивно (супротно смеру казаљке на сату) гледано са позитивног дела z -осе ка координатном почетку.
- (а) Израчунати $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ ако је $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$.
- (б) Израчунати $\int_C \eta$, где је $\eta = y^2 z^3 dx + 2xy z^3 dy + 3xy^2 z^2 dz$.
- (в) Израчунати $\int_C \zeta$, где је ζ диференцијална 1-форма дуална радијалном векторском пољу \mathbf{r} у односу на еуклидски скаларни производ.
- (2) Нека је $\eta = (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} (xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy)$ диференцијална 2-форма у \mathbb{R}^3 .
- (а) Израчунати интеграл форме η по сфери $\Sigma := \{x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}$, оријентисаној спољашњом нормалом.
- (б) Наћи векторско поље \mathbf{F} такво да се интеграл у (а) може написати као $\int_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$.
- (в) Израчунати интеграл форме η по сфери $(x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 1$.
- (3) Израчунати површину сферног правоугаоника кога ограничавају два меридијана и две паралеле јединичне сфере $\mathbb{S}^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$.
- (4) (а) Нека су H_0 и H_1 две хиперравни еуклидског простора \mathbb{R}^n , D_0 област у H_0 , а D_1 ортогонална пројекција области D_0 на H_1 . Доказати да је $\mu(D_1) = \mu(D_0) \cos \alpha$, где μ означава $(n - 1)$ -димензиону меру скупа, а α угао између хиперравни H_0 и H_1 .
- (б) Дати геометријски смисао изразу $dS = \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2} dx dy$ за елемент површине графика глатке функције $z = f(x, y)$.
- (в) Ако је површ $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ задата једначином $h(x, y, z) = 0$, а $U \subset \Sigma$ област на тој површи која се бијективно пројектује на област D у (x, y) -равни, доказати да је мера површи U
- $$\mu(U) = \iint_D \frac{\|\nabla h\|}{|h'_z|} dx dy.$$
- (г) Израчунати $\lim_{n \rightarrow \infty}$ односа површина полусфере $\mathbb{S}_+^n := \mathbb{S}^n \cap \{x_{n+1} \geq 0\}$ и њене пројекције на раван $x_{n+1} = 0$.
- (5) У области $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ конструисати:
- (а) затворену форму која није тачна
- (б) векторско поље \mathbf{F} које задовољава $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$, али није соленоидно (тј. не постоји поље \mathbf{B} такво да је $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{B}$).
- (в) Да ли у $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ постоји векторско поље \mathbf{F} које није потенцијално (не постоји функција f за коју је $\mathbf{F} = \nabla f$), а задовољава $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{O}$?
- (г) Уопштити (а)–(в) на $\mathbb{R}^n \setminus \{O\}$.
- (6) Израчунати де Рамову кохомологију $H_{dR}^*(\mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\})$ где су P, Q две различите тачке, и наћи форме чије кохомолошке класе генеришу ову кохомологију.
- (7) Доказати да је са $\omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) := \mathbf{r} \cdot \mathbf{X} \times \mathbf{Y}$ (где је \mathbf{r} радијално векторско поље у \mathbb{R}^3) дефинисана затворена диференцијална 2-форма на дводимензианој сфери $\mathbb{S}^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ и да је њена кохомолошка класа генератор друге де Рамове кохомологије $H_{dR}^2(\mathbb{S}^2)$. Наћи форму чија је кохомолошка класа генератор де Рамове кохомологије $H_{dR}^n(\mathbb{S}^n)$.