Теорија Морса 2007/08. **Девети домаћи задатак**

(1) Израчунати хомологију Морсовог ланчастог комплекса функције висине на сфери $\mathbb{S}^n$ директно, без позивања на Теорему о Морсовој хомологији.

(2) Конструисати Морсову функцију на $\mathbb{S}^1$ са 4 критичне тачке и израчунати хомологију њеног Морсовог ланчастог комплекса директно, без позивања на Теорему о Морсовој хомологији.

(3) Нека је $f(x,y) = \cos(2\pi x) + \cos(2\pi y)$ дефинисана на торусу $\mathbb{T}^2$ представљеном као квадрат са идентификованим супротним странама; $[0,1] \times [0,1]/_\sim$. Директно, без позивања на Теорему о Морсовој хомологији, израчунати хомологију ланчастог комплекса $C_*(f)$.

(4) Израчунати хомологију пројективне равни користећи Теорему о Морсовој хомологији и погодно изабрану Морс–Смејлову функцију.

(5) Извести Морсове неједнакости из Теореме о Морсовој хомологији.

(6) Нека је $f : M \to \mathbb{R}$ Морсова функција и $(C_k(f), \partial_k)$ њен Морсов ланчасти комплекс.

(а) Доказати да је са $C^k(f) := \mathrm{Hom}\,(C_k(f), \mathbb{Z}_2)$ и

$$(\forall \alpha \in C^k(f))\,(\forall x \in \mathrm{Crit}_k(f))\,\langle \delta^k \alpha, x\rangle = \langle \alpha, \partial_{k+1} x\rangle$$

добро дефинисан коланчасти комплекс $(C^k(f), \delta^k)$.

(б) Доказати „Поенкареову дуалност”

$$H_k(f) \cong H^{n-k}(-f).$$

(7) Нека су $f_1 : M_1 \to \mathbb{R}$ и $f_2 : M_2 \to \mathbb{R}$ Морсове функције.

(а) Доказати да је са

$$f_1 \oplus f_2 : M_1 \times M_2 \to \mathbb{R}, \quad f_1 \oplus f_2(x_1, x_2) := f_1(x_1) + f_2(x_2)$$

дефинисана Морсова функција на $M_1 \times M_2$.

(б) Доказати да је

$$\mathrm{Crit}_k(f_1 \oplus f_2) = \bigcup_{i+j=k} \mathrm{Crit}_i(f_1) \times \mathrm{Crit}_j(f_2).$$

(в) Доказати да је

$$C_*(f_1 \oplus f_2) = C_*(f_1) \otimes C_*(f_2).$$

(г) Користећи (в) дефинисати „крос–производ”

$$\times : H_{k_1}(f_1) \otimes H_{k_2}(f_2) \to H_{k_1+k_2}(f_1 \oplus f_2).$$

(д) Нека је $f : M \to \mathbb{R}$ Морсова функција. Доказати да пресликавање

$$\Delta : \mathrm{Crit}(f) \to \mathrm{Crit}(f) \times \mathrm{Crit}(f), \quad x \mapsto (x, x)$$

индукује хомоморфизме

$$\Delta_* : H_k(f) \to H_k(f \oplus f), \quad \Delta^* : H^k(f \oplus f) \to H^k(f).$$

(ђ) Нека је $f : M \to \mathbb{R}$ Морсова функција. Користећи (г), (д) и Задатак 6 доказати да је са $\cup := \Delta^* \circ \times$ добро дефинисан „кап–производ”

$$\cup : H^{k_1}(f) \otimes H^{k_2}(f) \to H^{k_1+k_2}(f)$$

који је билинеаран и градуисано комутативан.